Exercice1 : 3 points (1pt +1pt +1pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r tel que : $u_3=-4$ et $u_8=6$

1) Calculer la raison r de cette suite

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer la somme suivante : $S=u_8+u_9+\cdots+u_{57}$

Solution :1) la raison r ??

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n=u_p+(n-p)r$

Pour n= 8 et p = 3 on a :$u_8=u_3+(8-3)r$

Donc : $u_8=u_3+5r$

Donc : $6=-4+5r \Leftrightarrow 10=5r \Leftrightarrow \frac{10}{5}=r \Leftrightarrow r=2$

2) u_n en fonction de n ?

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n=u_p+(n-p)r$

Donc : $u_n=u_3+(n-3)\times 2$

Donc : $u_n=-4+2n-6$

Donc : $u_n=2n-10 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3) Calcul de la somme suivante : $S=u_8+u_9+\cdots+u_{57}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$$S=u_8+u_9+\cdots+u_{57}=(57-8+1)\frac{u_8+u_{57}}{2}$$

$$S=50\frac{u_8+u_{57}}{2}$$

On a : $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=2n-10$

Donc : $u_{57}=2\times 57-10=114-10=104$

Donc : $S=25(6+104)=25\times 110=2750$

Exercice2 : 3 points (1pt 2pt)

Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=u_n^{\ 2}+4u_n+6 \\ u_0=3 \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer u_1

2) Montrer que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

Solution : 1) $u_{0+1}=u_0^{\ 2}+2u_0+2=(-1)^2+2\times(-1)+2=1+-2+2=1$

2) Montrons que : $2\le u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- Pour n=0 on a $2\le u_0=3$ donc la proposition vraie pour n=0
- Supposons : $2\le u_n$

- Montrons que : $2 \leq u_{n+1}$?

$u_{n+1}-2=u_n^2+4u_n+6-2=u_n^2+4u_n+4=(u_n+2)^2\geq 0$

Donc : $2 \leq u_{n+1}$

Donc d'après le principe de récurrence : $2 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Alors : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

Exercice3 : 4 points (2pt +1pt +1pt)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{2u_n-1}{u_n} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=3 \end{cases}$

Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=1$ et déterminer son premier terme

2) Ecrire v_n en fonction de n

3) En déduire u_n en fonction de n

Solution : 1) $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}-1}-\dfrac{1}{u_n-1}=\dfrac{1}{\dfrac{2u_n-1}{u_n}-1}-\dfrac{1}{u_n-1}$

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n}{u_n-1}-\dfrac{1}{u_n-1}=1$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $v_0=\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$

2) Ecrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $v_0=\dfrac{1}{2}$

Donc : $v_n=v_0+nr=\dfrac{1}{2}+n\times 1=\dfrac{1}{2}+n=\dfrac{2n+1}{2}$

3) Puisque : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$ donc $u_n-1=\dfrac{1}{v_n}$

Donc $u_n=\dfrac{1}{v_n}+1$

Donc : $u_n=\dfrac{v_n+1}{v_n}=\dfrac{1+\dfrac{2n+1}{2}}{n+1}=\dfrac{\dfrac{2n+1+2}{2}}{\dfrac{2n+1}{2}}=\dfrac{\dfrac{2n+3}{2}}{\dfrac{2n+1}{2}}=\dfrac{2n+3}{2n+1}$

Exercice4 : 10 points (1pt +2pt +2pt + 0.5pt +0.5pts +2pt+0.5pt+0.5pt+1pt)

Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+1 & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=1 \end{cases}$

Et soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=u_n-2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer: v_0

2) Montrer par récurrence que : $u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Déduire que la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

4) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Ecrire v_n en fonction de n

c) En déduire u_n en fonction de n

5) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ Calculer : S_n en fonction de n

Solution : 1) On a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 1$

Donc : $u_1 = \frac{1}{2}\times 1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$

Donc : $u_1 = \frac{3}{2}$

Pour n=1 on : $u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + 1$

Donc : $u_2 = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$

On a : $v_n = u_n - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on : $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$

Donc : $v_0 = -1$

Pour n=1 on : $v_1 = u_1 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2}$

Donc : $v_1 = -\frac{1}{2}$

2) Montrons que : $u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Pour n=0 on a $u_0 = 1 \leq 2$ donc la proposition vraie pour n=0
- Supposons : $u_n \leq 2$
- Montrons que : $u_{n+1} \leq 2$?

$$2 - u_{n+1} = 2 - \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) = 2 - \frac{1}{2}u_n - 1 = 1 - \frac{u_n}{2} = \frac{2-u_n}{2}$$

On a : $u_n \leq 2$ donc $2 - u_n \geq 0$

Donc : $\frac{2-u_n}{2} \geq 0$

Donc : $u_{n+1} \leq 2$

Donc d'après le principe de récurrence :

$u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+1-u_n=\frac{u_n+2-2u_n}{2}=\frac{-u_n+2}{2}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2-u_n}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

On a : $u_n\leq 2$ donc : $2-u_n\geq 0$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{2-u_n}{2}\geq 0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc : $u_0\leq u_1\leq u_2\leq ....\leq u_n$

Donc : $u_0\leq u_n$

Donc : $1\leq u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2 car $u_n\leq 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 car $1\leq u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

4) a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$?

$v_{n+1}=u_{n+1}-2=\frac{1}{2}u_n+1-2=\frac{u_n}{2}-1=\frac{u_n-2}{2}$

Donc : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et son premier terme : $v_0=-1$

b) Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q=\frac{1}{2}$ et son premier terme : $v_0=-1$ alors :

$v_n=v_0\times q^n=(-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) On a : $v_n=u_n-2\Leftrightarrow v_n+2=u_n$ et on a : $v_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $u_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

5) On pose : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ Calcul de : S_n en fonction de n

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique donc :

$S_n=(le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$

$le\ nombre\ de\ termes=n-0+1=n+1$

$$S_n = v_0 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = -1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = -2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

« C’est en forgeant que l’on devient forgeron » Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercice Que l’on devient un mathématicien