Barycentre

Exercices avec solutions

Exercice 1. Construire le point G, si il existe, barycentre de (A ; a) et (B ; b) dans les cas suivants :

1. $a = 3$ et $b = 5$
2. $a = 5$ et $b = -4$
3. $a = -1$ et $b = -3$
4. $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{3}{2}$
5. $a = -2$ et $b = 2$
6. $a = 4$ et $b = 6$

Correction :

1. $3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BA}$

2. $\overrightarrow{BG} = 5\overrightarrow{BA}$

5. Le barycentre n'existe pas

Exercice 2.

Construire le point G, si il existe, barycentre de (A ; a), (B ; b) et (C ; c) dans les cas suivants :

1. $a = 3$; $b = 5$ et $c = 4$
2. $a = -2$; $b = 5$ et $c = 3$
3. $a = -1$; $b = -2$ et $c = -4$
4. $a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$ et $c = 2$

Correction :

1. I barycentre partiel de (B ; 5) et (C ; 4) ; puis $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$; on peut également tout faire passer par le point A et on obtient $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Exercice 3.

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de (A ; 1), (B ; 4) et (C ; -3).

a) Construire le barycentre I de (B ; 4) et (C ; -3).

b) Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$ et en déduire la position de G sur (AI).

Correction :

a) $\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ or I est le barycentre partiel de (B ; 4) et (C ; -3) donc affecté du coef. 1.

Exercice 4. Soit G le barycentre de (A; 1), (B ; -1), (C ; 2) et (D ; 3).

a) Quelle relation vectorielle peut-on écrire ?

b) Soit J le barycentre de (A ; 1) et (C ; 2) et K le barycentre de (B ; -1) et (D ; 3).

Montrer que $3\overrightarrow{GJ} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$. Construire les points J, K et G.

c) Construire le barycentre L de (A ; 1), (B ; -1) et (C ; 2). Montrer que $2\overrightarrow{GL} + 3\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

En déduire une nouvelle construction de G.

Barycentre

Correction :

a) $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

et $-\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{BD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$

On a : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GJ}$ et $-\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GK}$; d'où la relation cherchée.

c) idem

Exercice 5.

On se donne un triangle ABC. Pour tout point M du plan on pose : $f(M) = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a) P désignant un point quelconque du plan, prouver que $f(M) = f(P) =$ constante

b) Construire G_1 le barycentre de (B ; -3) et (C ; 1). Montrer que $f(M) = 2\overrightarrow{G_1A}$.

c) Construire G_2 le barycentre de (A ; 2) et (C ; 1). Montrer que $f(M) = 3\overrightarrow{BG_2}$

d) On désigne par G_3 le barycentre de (B ; -3) et (A ; 2). Montrer que les droites (AG_1), (BG_2) et (CG_3) sont parallèles. En déduire une construction de G_1, G_2 et G_3.

Correction :

a) $f(M) = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

b) $-3\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$ et $-3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MG_1} \Leftrightarrow f(M) = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MG_1} = 2\overrightarrow{G_1A}$.

c) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG_2} \Leftrightarrow f(M) = 3\overrightarrow{MG_2} - 3\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{BG_2}$.

d) $-3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MG_3} \Leftrightarrow f(M) = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG_3} = \overrightarrow{G_3C}$

On a donc : $f(M) = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{G_1A} = 3\overrightarrow{BG_2} = \overrightarrow{G_3C}$;
les vecteurs sont colinéaires et les droites sont parallèles.

Barycentre

Exercice 6.

ABC est un triangle rectangle isocèle de sommet A, de côté *a*, c'est à dire que *a* désigne la longueur *AB*. Pour chaque question déterminer et tracer le lieu des points vérifiant le relation donnée :

a) $\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$

b) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right\|=2a$

c) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$

d) $2\,AM^2+BM^2+CM^2=a^2$

e) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right\|=\left\|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$

Correction :

a) $\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$ on a immédiatement M barycentre du système de points (A ; 1), (B ; 2), (C ; 2). On construit en premier le milieu H de [BC] ; puis on a $\overrightarrow{HM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{HA}$.

b) I barycentre du système de points (A ; 2), (B ; 1) et (C ; 1) {I milieu de [AH]}

donc $\left\|4\overrightarrow{IM}\right\|=2a \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{IM}\right\|=\frac{1}{2}a$ on en déduit que M $\in$ au cercle de centre I et de rayon ½ *a*.

c) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\| \Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{IM}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{IM}\right\|=\frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{4}a\sqrt{2}$

d) $2\,AM^2+BM^2+CM^2=a^2 \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IM}\right)^2=a^2$

on développe et on regroupe d'où $2\overrightarrow{IM}.\left(2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}\right)+4IM^2=a^2-2AI^2-BI^2-CI^2$

or $2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{0}$ et $AI^2=\frac{2a^2}{16}$; $BI^2=CI^2=\frac{10a^2}{16}$

d'où $4\,IM^2=-\frac{8a^2}{16}$ ce qui est impossible donc le point M n'existe pas

e) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right\|=\left\|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\| \Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{G_1M}\right\|=\left\|-\overrightarrow{G_2M}\right\|$

G_1 barycentre du système de points (A ; 2), (B ; 1), (C ; 1)
G_2 barycentre du système de points (A ; 1), (B ; -1), (C ; -1)
M est sur la droite perpendiculaire à $[G_1G_2]$ passant par le point situé à ¼ en partant de G_1.

Exercice 7.

ABCD est un carré de côté *a*. Pour chaque question déterminer le lieu des points vérifiant la relation donnée :

a) $\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\| = \overrightarrow{AB}$

b) $\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\| = \left\|3\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DM}\right\|$

c) $\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DM}\right\|$

d) $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4a^2$

e) $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = a^2$

Correction :

a) On a immédiatement M barycentre du système de points (A ; 1), (B ; 1), (C ; 1) et (D ; 1). On construit en premier les milieux de [AB] et de [CD] ; puis on a $\left\|4\overrightarrow{GM}\right\| = \overrightarrow{AB}$.

b) I barycentre du système de points (A ; 3), (B ; 3), (C ; -1) et (D ; -1).

G_1 milieu de [AB] et G_2 de [DC]

$$3\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DM} = 6\overrightarrow{G_1I} - 2\overrightarrow{G_2I} = \overrightarrow{0}$$

Donc $3\overrightarrow{G_1I} - \overrightarrow{G_2I} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_1I} = \overrightarrow{G_2G_1}$

D'où $\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\| = \left\|3\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DM}\right\| \Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{GM}\right\| = \left\|4\overrightarrow{IM}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{GM}\right\| = \left\|\overrightarrow{IM}\right\|$

M est sur la médiatrice de [IG] donc M $\in$ (AB).

c) Pas de barycentre $\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DM}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{GM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right\| = \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right\|$ or $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$ donc G = M

d) $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4a^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)^2 + \text{.........} = 4a^2$

on développe, on regroupe et on obtient

$$2\overrightarrow{GM}.\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}\right) + 4GM^2 = 4a^2 - AG^2 - BG^2 - CG^2 - DG^2$$

or $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{0}$ et $AI^2 = BI^2 = CI^2 = DG^2 = \frac{a^2}{2}$

donc $4.GM^2 = 4a^2 - 4\frac{a^2}{2} \Leftrightarrow GM^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow$ M $\in$ au cercle de centre G et de rayon $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

e) ……. $GM^2 = a^2 - 2a^2 = -a^2$ impossible