Leçon3 : **Equations, inéquations et systèmes**

PARTIE2 : Equation du second degré à une inconnue

Présentation globale

- Equation du premier degré à une inconnue ;
- équations se ramenant à la résolution d'équations du premier degré à une inconnue
- Signe de : ax +b et inéquations du premier degré à une inconnue ;
- Inéquations se ramenant à la résolution d'inéquations du premier degré à une inconnue ;
- Equation du second degré à une inconnue,
- Factorisation d'un trinôme ;
- Equations du premier degré à deux inconnues ;
- Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

(méthodes derésolution : substitution, combinaison lineaire).

Capacités attendues

- Résoudre des équations du premier degré et du second degré à une inconnue et des équations précédentes ;
- Factoriser un trinôme du second degré en utilisant différentes techniques ;
- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue et des inéquations se ramenant à la résolution des inéquations précédentes ;
- Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues ;
- Mathématiser des situations qui se ramènent à la résolution des équations, des inéquations et des systèmes précédents.

Recommandations pédagogiques

- Les techniques de résolution des équations et inéquations du premier degré à une inconnue ont été étudiées au collège, il faudra renforcer cette pratique par l'étude de quelques exemples Simple ;
- En utilisant le discriminant dans la résolution des équations du second degré, on donnera aussi une Importance aux autres techniques (factorisation, forme canonique…)
- Les équations paramétriques du premier et du second degré sont hors programme ;
- Des problèmes, issus de la vie quotidienne ou des autres matières (qui sont en relation avec l'avenir de l'élève : économie, géographie...) , devront être proposés dans le but d'habituer les élèves à mathématiser des situations et de les résoudre.

I) Equation du second degré a une inconnue.

2)Activité : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2 = 16$ 2) $x^2 = -8$ 3) $(x+2)^2 = 9$ 4) $5x^2 - 4x = 0$ 5) $3x^2 - x - 2 = 0$

Solution : 1) L'équation $x^2 = 16$.

16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et $x = -\sqrt{16} = -4$.

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{-4; 4\}$

2) L'équation $x^2 = -8$.

-8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution

Dans $\mathbb{R}$. Donc : $S = \varnothing$

3) L'équation $(x+2)^2 = 9$. on a alors $x + 2 = 3$ ou $x + 2 = -3$.

L'équation admet deux solutions $x=3-2=1$ et $x=-3-2=-5$.
Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-5;1\}$

4) $5x^2-4x=0$ ssi $x(5x-4)=0$

Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$

Soit : $x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$ Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

5) $3x^2-x-2=0$ On va d'abord Factoriser les trinômes $3x^2-x-2$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(x^2-2\frac{1}{2\times3}x+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left[\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right]$$

$$3x^2-x-2=3\left[\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right]$$ Cette écriture s'appelle la forme canonique

$$3x^2-x-2=3\left(x-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

Donc : $3x^2-x-2=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ la forme factorisée

$3x^2-x-2=0$ ssi $(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$

On a alors $x-1=0$ ou $x+\frac{2}{3}=0$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et . $x=-\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

2) Définition1 : Une équation du second degré a une inconnue est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a\neq0$.
Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme ax^2+bx+c.

Exemple : L'équation $3x^2-6x-2=0$ est une équation du second degré.

3) Définition2 : Soit le du trinôme ax^2+bx+c avec $a\neq0$.
On appelle d**iscriminant** du trinôme ax^2+bx+c, le nombre réel, noté : $\Delta=b^2-4ac$.

Exemple : Pour le trinôme $3x^2-x-2$
a) Calculons le discriminant :a = 3, b = -1 et c = -2 donc :
$\Delta = b^2-4ac=(-1)^2-4\times3\times(-2)==1+24=25$

4)Propriété : soit l'équation $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a\neq0$.
Et soit Δ son discriminant
- Si $\Delta<0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle c a d : $S=\varnothing$
Et on ne peut pas factorisée le trinôme ax^2+bx+c
- Si $\Delta=0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une seule solution (dite double) : $x_0=-\frac{b}{2a}$.

c a d : $S=\{x_0\}$ et le trinôme ax^2+bx+c a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ c a d : $S=\{x_1;x_2\}$

Et le trinôme ax^2+bx+c a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Applications : Résoudre les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\dfrac{9}{8}=0$ c) $x^2+3x+10=0$ d) $6x^2-x-1=0$

Solution : a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$:

a = 2, b = -1 et c = -6 donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$

Donc : $S=\left\{-\dfrac{3}{2};2\right\}$ et le trinôme $2x^2-x-6$ a une forme factorisée :

$2x^2-x-6=a\left(x-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right)(x-2)$ c a d : $2x^2-x-6=a\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation : $2x^2-3x+\dfrac{9}{8}=0$: a = 2, b = -3 et c = $\dfrac{9}{8}$

donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \dfrac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-3}{2\times 2}=\dfrac{3}{4}$

c a d : $S=\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2-3x+\dfrac{9}{8}$ a une forme factorisée : $2x^2-3x+\dfrac{9}{8}=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2+3x+10=0$:a = 1, b = 3 et c = 10

donc ; $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S=\varnothing$

d) $6x^2-x-1=0$ $\Delta=1+24=25$

$x_1=\dfrac{1+5}{12}=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{1-5}{12}=-\dfrac{1}{3}$ Donc : $S=\left\{-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right\}$

Et $R(x)=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $6x^2-7x-5=0$ 2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ 3) $3x^2+x+2=0$ 4) $4x^2-8x+3=0$

5) $x^2-4x+2=0$ 6) $x^2+5x+7=0$ 7) $2x^2-4x+6=0$ 8) $x^2-4x-21=0$

9) $3x^2-6x+3=0$

Solution : 1) $6x^2-7x-5=0$ $a=6$ et $b=-7$ et $c=-5$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times6\times(-5)=49+120=169=(13)^2>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times 6} = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ et $x_2 = \frac{7-13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$ Donc : $S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$

2) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ $a = 2$; $b = -2\sqrt{2}$; $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4\times 2\times 1 = 8 - 8 = 0$

Comme Δ = 0, l'équation possède une seule solution (dite double):

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Donc : $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2 + x + 2 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4\times 3\times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \varnothing$

4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\times 3\times (4) = 84 - 8 = 16 = (4)^2 > 0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times 4}$ et $x_2 = \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times 4}$

$x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ donc : $S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

5) $x^2 - 4x + 2 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times 2\times (1) = 16 - 8 = 8 > 0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes

$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times 1}$ et $x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times 1}$

Donc : $x_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2} = 2+\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} = 2-\sqrt{2}$

Donc : $S = \left\{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right\}$

6) $x^2 + 5x + 7 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4\times 1\times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \varnothing$

7) $2x^2 - 4x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times 2\times 6 = 16 - 48 = -32 < 0$

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \varnothing$

8) $x^2 - 4x - 21 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times 1\times (-21) = 16 + 84 = 100 = (10)^2 > 0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times1}$ et $x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times1}$

$x_1 = \frac{4+10}{2} = \frac{14}{2} = 7$ et $x_2 = \frac{4-10}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ Donc : $S = \{-3, 7\}$

9) $3x^2 - 6x + 3 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times3\times3 = 36 - 36 = 0$

Comme Δ = 0, l'équation possède une seule solution (dite double):

$x = \frac{-(-6)}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$ $S = \{1\}$

Exercice : Factoriser les trinômes :

a) $4x^2 + 19x - 5$ b) $9x^2 - 6x + 1$

Solution :a) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:

Calcul du discriminant : Δ = 19² – 4 x 4 x (-5) = 441

Les racines sont : $x_1 = \frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4} = -5$ et $x_2 = \frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4} = \frac{1}{4}$

On a donc : $4x^2 + 19x - 5 = 4(x-(-5))\left(x - \frac{1}{4}\right) = (x+5)(4x-1)$.

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:

Calcul du discriminant : Δ = (-6) ² – 4 x 9 x 1 = 0

Comme Δ = 0, le trinôme possède une seule racine (dite racine double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\times9} = \frac{1}{3}$:

et le trinôme $9x^2 - 6x + 1$ a une forme factorisée : $9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

Exercice : Avec 60 dh j'ai acheté un nombre de jouets identique. (Ont donc le même prix)
Si chaque jouet avait couté 1dh de moins ; j'aurais pu en acheter 3 de plus .
Combien en ai-je acheté ?

Solution : Soit n le nombre de jouets achetés
Et soit p le prix d'un jouet en dh

Nous avons donc : $60 = np$ et $60 = (n-1)(p+3)$

Nous déduisons donc l'équation : $n^2 + 3n - 180 = 0$

Calcul du discriminant: Δ =729 > 0 Les solutions sont : $n_1 = \frac{-3+\sqrt{729}}{2\times1} = 12$ et $n_2 = \frac{-3-\sqrt{729}}{2\times1} = -15$

Nous rejetons $n_2 = -15$ car le prix est positif

Donc : j'ai acheté 12 jouets.

Exercice : (**) La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs vaut 3470.
Quel est le premier de ces nombres?

Solution : Appelons x le premier de ces trois nombres. x vérifie l'équation :

$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 3470$

Donc : $x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=3470$

Donc : $3x^2+6x+5=3470$

C'est-à-dire : $3x^2+6x-3465=0$

Calculons: $\Delta=6^2-4\times3\times(-3465)=36+41580=41616$

Les deux valeurs possibles pour x sont :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{41616}}{2\times3}=\frac{-6-204}{6}=\frac{-210}{6}=-35$$

Et $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{41616}}{2\times3}=\frac{-6+204}{6}=33$

Comme x est un entier naturel x est positif le premier des trois nombres est 33.