Leçon1 : Fonctions numériques

Fonctions numériques

Présentation globale

Domaine de définition d'une fonction, Parité et monotonie.

Représentation des fonctions : $x \xrightarrow{f} ax+b$ et $x \xrightarrow{f} ax^2$ et $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$ et $x \xrightarrow{f} ax^2+bx+c$

Représentation d'une fonction affine par morceaux ;

Capacités attendues

- Maitriser la construction directe des fonctions indiquées,
- Déduire les variations d'une fonction à partir de sa représentation graphique ;
- Reconnaitre la variable et le domaine de définition de cette variable pour une fonction définie par un tableau de données ou une courbe ou une expression ;
- Reconnaitre graphiquement l'image d'un nombre
- Reconnaitre graphiquement un nombre dont on connait l'mage par une fonction ;
- Construire une représentation graphique cohérente avec le tableau de variation d'une fonction.

Recommandations pédagogiques

- On renforcera les acquis des élèves sur les fonctions linéaires et les fonctions affines et on les améliorera pour approcher la notion de fonction à travers diverses activités ;
- On entrainera l'élève à construire des représentations graphiques, tableaux numériques dans le but de reconnaitre la variable et déduire des résultats sur l'étude de fonctions (valeur maximale, valeur minimale, variations, résolution d'équations….) ;
- Il faudra entrainer les élèves à mathématiser des situations et à résoudre des problèmes divers en utilisant la notion de fonction numérique ;
- On représentera la fonction polynôme du second degré sans faire appel à la technique du changement du repère.

I) Définitions et Domaine de définitions

1°) Définitions :Une ***fonction*** est une relation qui a un nombre *x* appartenant à un ensemble D associe un nombre y

On note : x $\overset{f}{\mapsto}$ y ou encore $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$

On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f

Exemple1 : voici des exemples de fonctions numériques :

$f(x)=3x$; $g(x)=2x+3$; $h(x)=2x^2$; $M(x)=-2x^2+5x-1$; $N(x)=\frac{-2}{x}$

Exemple2 : Soit la fonction f définie par, $f(x)=3x^2-1$

1) Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par *f*.
2) Déterminer les antécédents éventuels de 2 par *f*,

Solution : 1) $f(1)=3\times1^2-1=3-1=2$ et $f(\sqrt{2})=3\times(\sqrt{2})^2-1=6-1=4$

$f(-1)=3\times(-1)^2-1=3-1=2$

2) $f(x)=2$ signifie que : $3\times x^2-1=2$

Signifie que : $3\times x^2 = 2+1$ signifie que : $3\times x^2 = 3$ signifie que : $x^2 = 1$
Signifie que : $x=-1$ ou $x=1$

Donc : les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

2°) Domaine de définitions

ACTIVITE : 1) On considère la fonction définie par : $x \overset{f}{\mapsto} \dfrac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

2) On considère la fonction définie par : $x \overset{g}{\mapsto} \sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; 4 ; 12.

Solution : 1) $f(0)=\dfrac{1}{0-3}=-\dfrac{1}{3}$ donc 0 aune image par f c'est : $-\dfrac{1}{3}$

$f(2)=\dfrac{1}{2-3}=-1$ Donc 2 a une image par f c'est : -1

$f(-3)=\dfrac{1}{-3-3}=-\dfrac{1}{6}$ Donc -3 a une image par f c'est : $-\dfrac{1}{6}$

$f(3)=\dfrac{1}{3-3}=\dfrac{1}{0}$!!!!!??? Mais $\dfrac{1}{0}$ n'existe pas en math donc 3 n'a pas d'images par f

2) $g(0)=\sqrt{0-3}=\sqrt{-3}$!!!!!??? Mais $\sqrt{-3}$ n'existe pas en math donc 0 n'a pas d'images par g

$g(2)=\sqrt{2-3}=\sqrt{-1}$!!!!!??? Mais $\sqrt{-1}$ n'existe pas en math donc 2 n'a pas d'images par g

$g(4)=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1$ Donc 4 a une image par g c'est : 1

$g(12)=\sqrt{12-3}=\sqrt{9}=3$ Donc 4 a une image par g c'est : 1

Définition : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D_f

$D_f = \{x\in\mathbb{R} / f(x)\in\mathbb{R}\}$

Exemple : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=2x+1$. 2) $g(x)=3x^2-x+1$ 3) $h(x)=\dfrac{3}{x}$

4) $M(x)=\dfrac{3}{2x-4}$. 5) $N(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$. 6) $K(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

Prof/ATMANI NAJIB

Solution : 1) $f(x)=2x+1$ Un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $g(x)=3x^2-x+1$ Un réel a toujours une image.

Donc $D_g=\mathbb{R}$

3) $h(x)=\dfrac{3}{x}$ Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul. : $D_h=\{x\in\mathbb{R} / x\neq 0\}$

Donc $D_h=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

On dira aussi que 0 est une valeur interdite pour la fonction h

4) $M(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$. Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul. : $D_M=\{x\in\mathbb{R} / 2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ ssi $x=\dfrac{4}{2}=2$ Donc $D_M=\mathbb{R}-\{2\}$

On dira aussi que 2est une valeur interdite pour la fonction M

5) $N(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$. $\quad D_N=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ Signifie $x^2-2^2=0$ Signifie $(x-2)(x+2)=0$

Signifie $x-2=0$ ou $x+2=0$ Signifie $x=2$ ou $x=-2$

Donc $D_N=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

6) $K(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$. $\quad D_K=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ Signifie $x(x^2-2)=0$ Signifie $x=0$ ou $x^2-2=0$

Signifie $x=0$ ou $x^2=2$ Signifie $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Donc : $D_K=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

II) Représentations graphique

Dans ce paragraphe le plan est rapporté a un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Définition : Soit f une fonction, et D_f son domaine de définition
l'ensemble des points M (*x*, *f* (*x*)) forment la courbe représentative de la fonction *f*, souvent notée C_f . $\quad C_f=\{M(x,f(x))/x\in D_f\}$

<u>Méthode :</u> Pour tracer la courbe représentative de la fonction
On calcule des images en nombre suffisant, et on présente les résultats dans un tableau de valeurs.

Exemple1 : Tracer la représentation graphique de la fonction affine f tel que : $f(x)=2x+1$

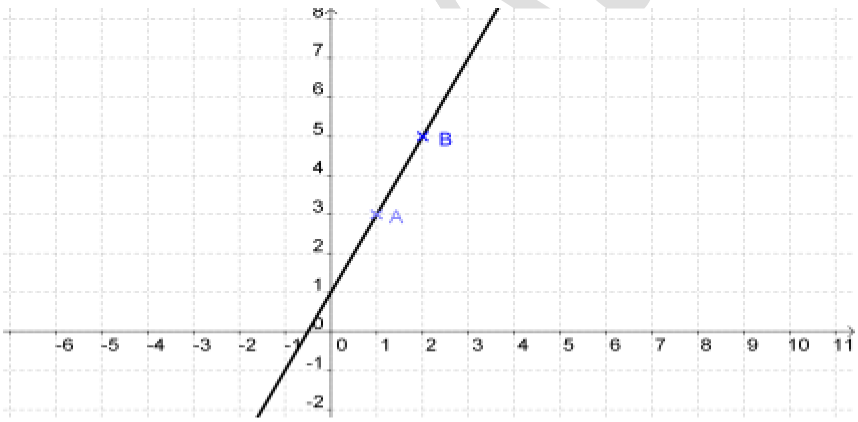
Solution : On choisi deux valeurs de x au hazard et on calcule leurs images pa f

$f(1)=2\times1+1=2+1=3$ Donc : $A(1;3)\in(C_f)$

$f(2)=2\times2+1=4+1=5$ Donc : $B(2;5)\in(C_f)$

On dresse le tableau des valeurs (deux points suffisent)

x	1	2
f(x)	3	5



Rq : la représentation graphique de la fonction affine ($f(x)=ax+b$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$)
est une droite

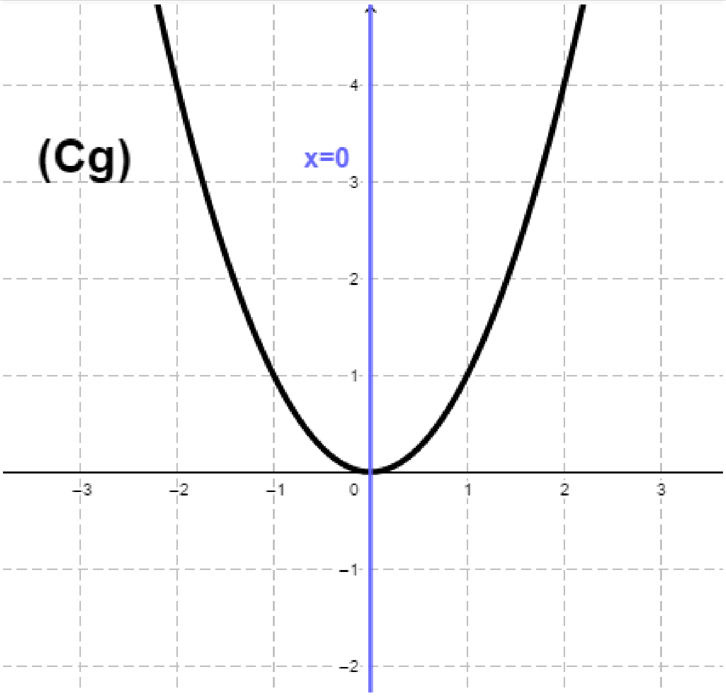
Exemple2: Soitg une fonction tel que : $g(x)=x^2$

Tracer la représentation graphique de la fonction g et donner une remarque pour cette courbe

Solution : 1)On dresse le tableau des valeurs (deux points ne suffisent pas)

La courbe (C_g) est symetrique par rapport à l'axe des ordonnées

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9



Exemple3 : Tracer la représentation graphique de la fonction *f* tel que : $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2+1}$

Sur I un l'intervalle $I=\left[-2;3\right]$

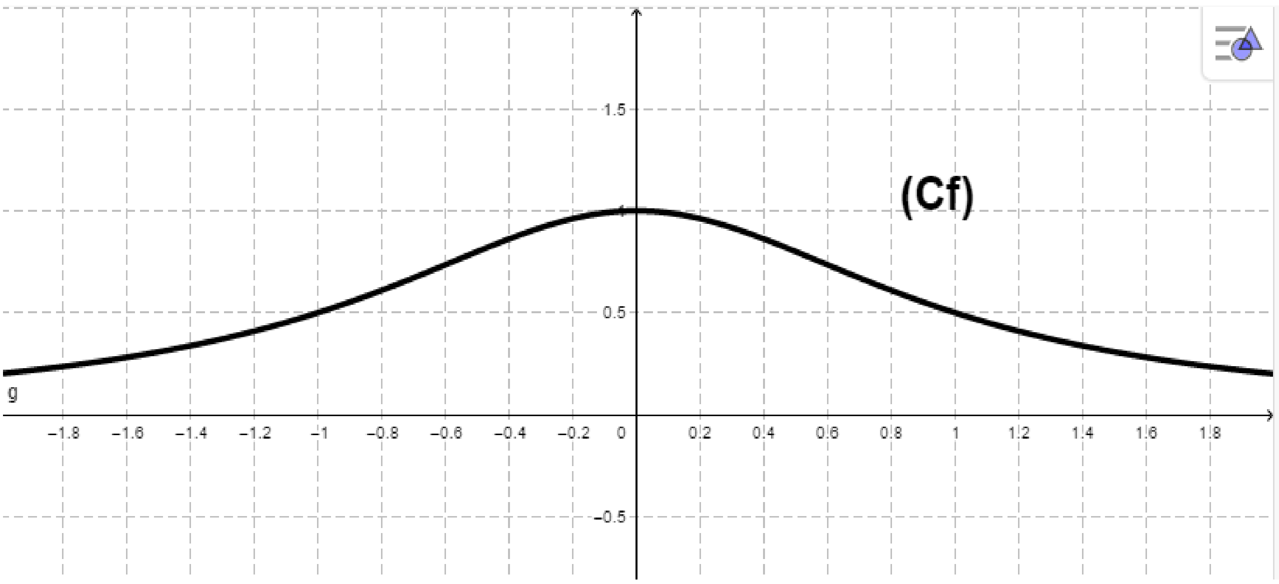
Solution : On dresse le tableau des valeurs :

Tableau de valeurs :

Prof/ATMANI NAJIB

x	-2	**-1**	**0**	**1**	**2**	**2**
f(x)	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1

Par exemple : $f\left(-2\right)=\frac{1}{\left(-2\right)^2+1}=\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}=0,2$ Donc 2 a une image par f c'est : -1



Exemple4 : Soit f une fonction tel que : $f\left(x\right)=2x-1$ si $x\in\left[1,+\infty\right[$ et $f\left(x\right)=-2x+3$ si $x\in\left]-\infty,1\right]$

Tracer la représentation graphique de la fonction *f*

Solution :a) On choisi deux valeurs de x dans $\left[1,+\infty\right[$ au hazard et on calcule leurs images pa f

$f\left(x\right)=2x-1$ si $x\in\left[1,+\infty\right[$

$f\left(1\right)=2\times1-1=2-1=1$ Donc : $A\left(1;1\right)\in\left(C_f\right)$

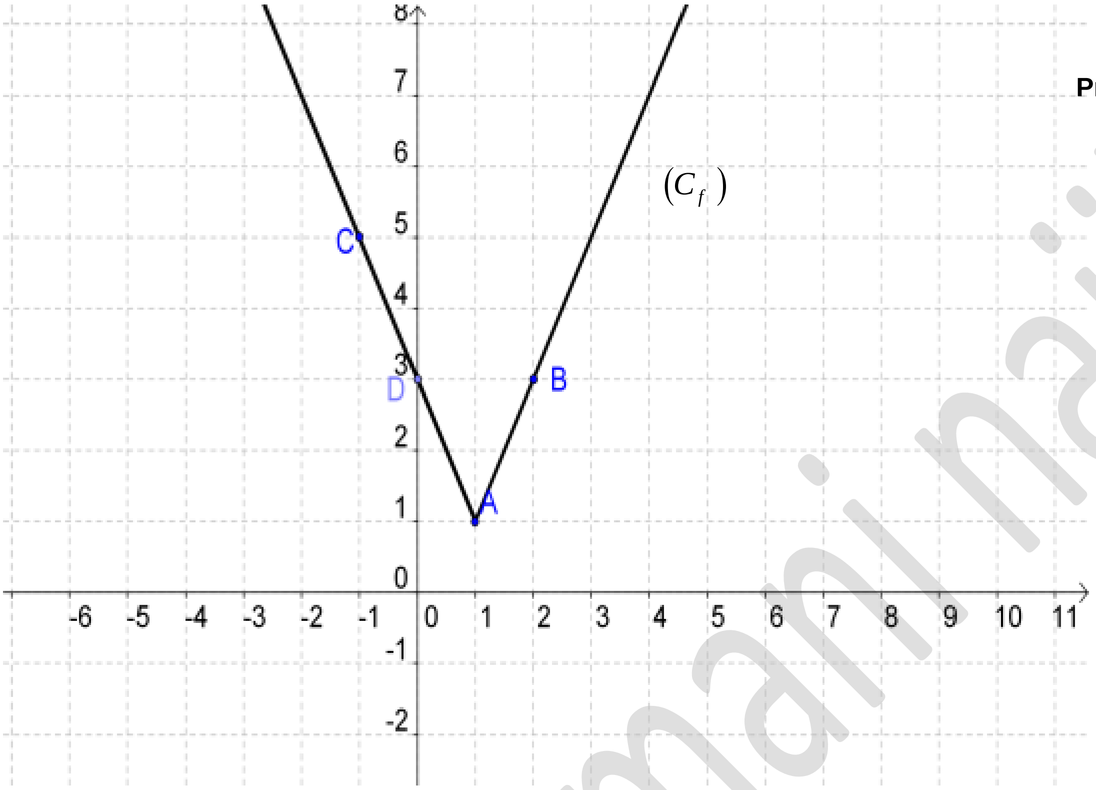
$f\left(2\right)=2\times2-1=4-1=3$ Donc : $B\left(2;3\right)\in\left(C_f\right)$

b) On choisi deux valeurs de x dans $\left]-\infty,1\right]$ au hazard et on calcule leurs images pa f

$f(x)=-2x+3$ si $x\in\left]-\infty,1\right]$

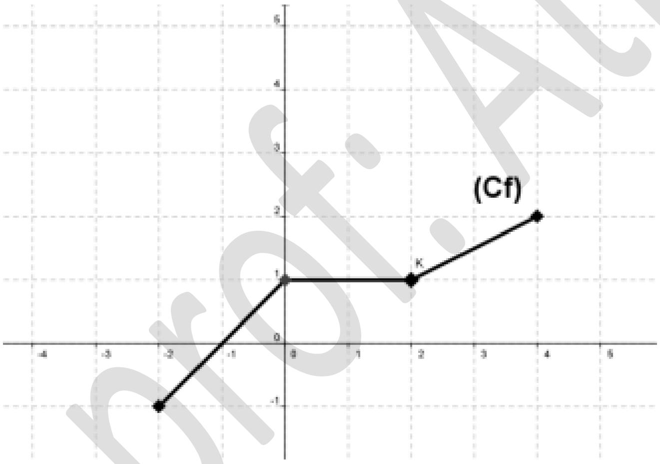
$f(-1)=-2\times(-1)+3=2+3=5$ Donc : $C(-1;5)\in(C_f)$

$f(0)=-2\times0+3=0+3=3$ Donc : $D(0;3)\in(C_f)$



Prof/ATMANI NAJIB

Exemple5 : La figure ci-dessous représente la représentation graphique d'une fonction f Sur l'intervalle : $[-2,4]$



Déterminer les images des nombres **:**
-2 ; -1 ;0 ; 2 ; 4 par la fonction f

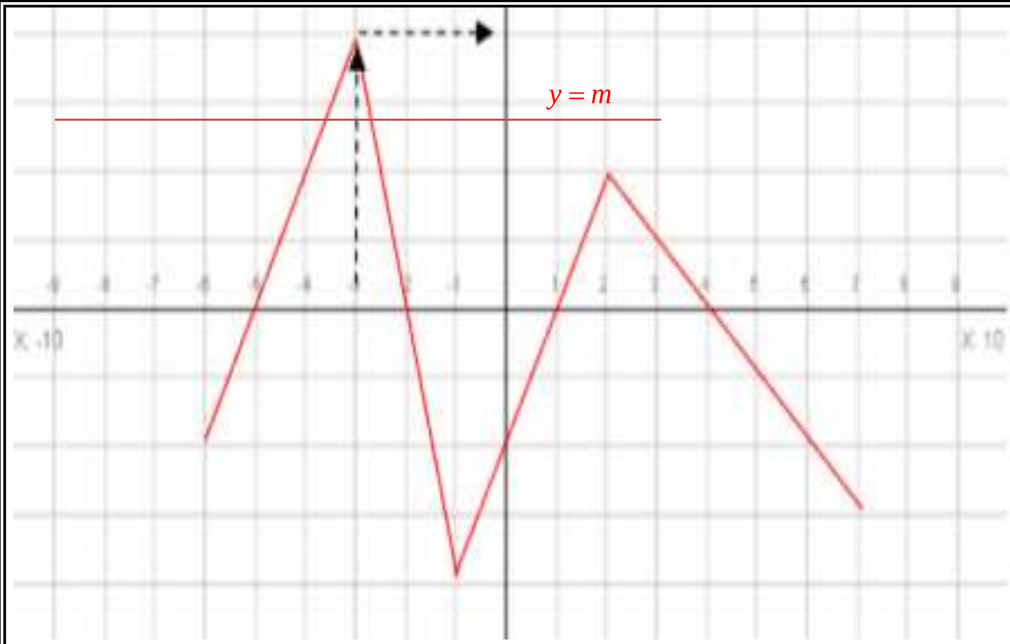
Solution : $f(-2)=-1$ et $f(-1)=0$ et $f(0)=1$ et $f(2)=1$ et $f(4)=2$

Remarque : que la représentation graphique de la fonction f est un segment sur chacun des intervalles : $[-2,0]$ et $[0,2]$ et $[2,4]$ donc la fonction f est affine sur ces intervalles

Exemple6:: La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6;7]$

Questions : Répondre par lecture graphique :

1- Quelles sont les images des réels -5, -3, 0 et 6 ?
2- Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?
3- Résoudre graphiquement $f(x)=0$



Solution : 1) Image de -5 est 0 (ordonnée du point d'abscisse -5) Image de -3 est 4
Image de 0 est -2 Image de 6 est -2

2) Antécédents de -1 sont : -5,5 -1,75 0,5 et 5
Antécédents de 0 sont : -5 -2 1 et 4

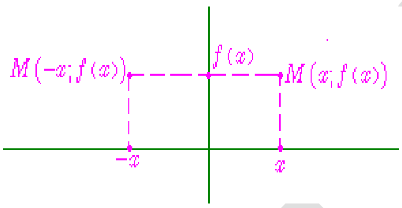
3) La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S = \{-5; -2; 1; 4\}$

III) Fonctions paires et Fonctions impaires

a. Fonction paire

On dit qu'une fonction *f* est paire si et seulement si :
1. Son ensemble de définition est centré
2. Pour tout réel *x* de D*f*, on a : *f*(-*x*) = *f*(*x*)

Prof/ATMANI NAJIB



b. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :
1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel *x* de D*f*, on a : *f*(-*x*) = -*f*(*x*)

Exemples : 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 - 5$

f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$

  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{3}{x}$

On a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc : $D_g = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $g(-x)=\frac{3}{-x}=-\frac{3}{x}$

  $g(-x)=-g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tq : $h(x)=2x^3+x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_h=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $h(-x)=2(-x)^3+(-x)^2=-2x^3+x^2$

  $h(-x)=-(2x^3-x^2)\neq -h(x)$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tq : $t(x)=\frac{x}{x-2}$

on a $t(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-2\neq 0$ ssi $x\neq 2$

Donc $D_t=\mathbb{R}-\{2\}$

on a $-2\in D_t$ mais $-(-2)=2\notin D_t$

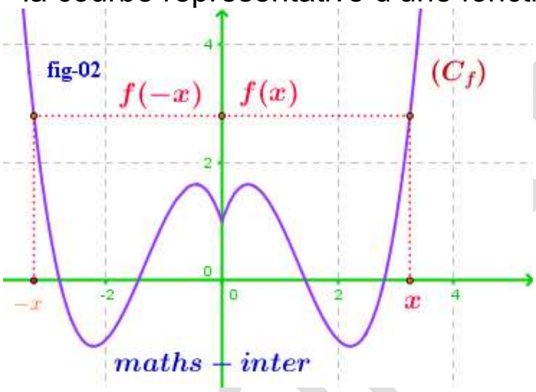
Prof/ATMANI NAJIB

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport a O

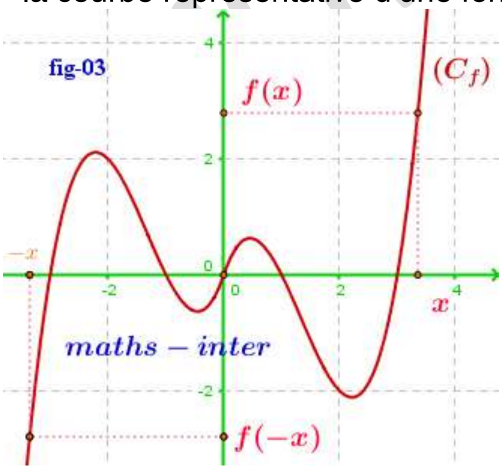
Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

c. le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.



- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



Exercice : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{-x}=-\dfrac{x^2-1}{x}$

$f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=(-x)^2+\dfrac{1}{-x}=x^2-\dfrac{1}{x}=\left(-x^2+\dfrac{1}{x}\right)$

$f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

IV) Les variations d'une fonction numérique

1) Sens de variation d'une fonction :fonction croissante -décroissante -fonction constantes

Activité: Soit la fonction définie par : $f(x)=3x-5$

1) Déterminer D_f et remplisser le tableau des valeurs suivant et donner des rémarques

x	-100	-10	-5	-2	0	2	5	10	100
f(x)									

2) Soit $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tels que : $x_1\prec x_2$ montrer que $f(x_1)\prec f(x_2)$

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Tracer la représentation graphique de la fonction *f*

Solution : 1) *f* est une fonction polynôme Donc : $D_f=\mathbb{R}$

x	-100	-10	-7	-3	0	2	5	10	100
f(x)	-305	-35	-26	14	-5	1	10	25	295

On remarque que l'orsque x augmente f(x) augmente aussi (la fonction est dite croissante)

2)Soit $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tels que : $x_1\prec x_2$

Donc $3x_1\prec 3x_2$ car $3\succ 0$

Prof/ATMANI NAJIB

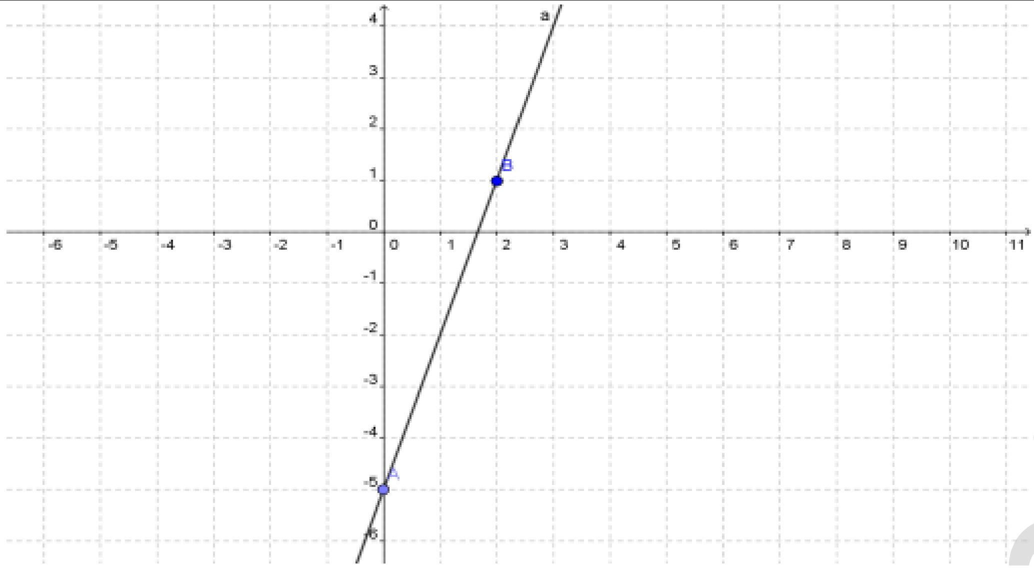
Donc $6x_1-5\prec x_2-5$ Alors $f(x_1)\prec f(x_2)$

D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3) Le tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

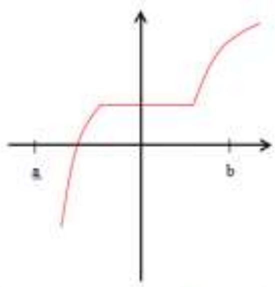
4) la Représentation graphique de la fonction *f* (c'est une droite car f est une fonction affine)



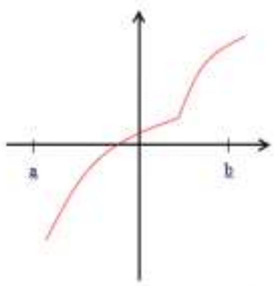
Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tel qur $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ $\left(f(x_1) \leq f(x_2)\right)$
Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».
- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ $\left(f(x_1) \geq f(x_2)\right)$
Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».
- Dire f que est constante sur I signifie que :
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$
- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Illustration graphique :



Fonction croissante sur $[a,b]$, mais non strictement croissante



Fonction strictement croissante sur $[a,b]$

Exemple1: Soit la fonction définie par : $g(x) = -2x + 4$

1) Déterminer D_g et remplisser le tableau des valeurs suivant et donner des rémarques

x	-100	-10	-5	-2	0	2	5	10	100
g(x)									

2) Etudier la monotonie de g
3) Dresser le tableau de variation de g
4) Tracer la représentation graphique de la fonction *g*

Solution : 1) g est une fonction polynôme Donc : $D_g = \mathbb{R}$

x	-100	-10	-5	-2	0	2	5	10	100
g(x)	204	24	14	0	4	0	-6	-16	-196

On remarque que l'orsque x augmente g(x) diminue (la fonction est dite décroissante)

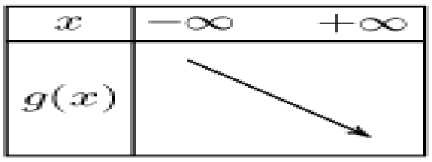
2) Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $x_1 \prec x_2$

Donc $-2x_1 \succ 2x_2$ car $-2 \prec 0$

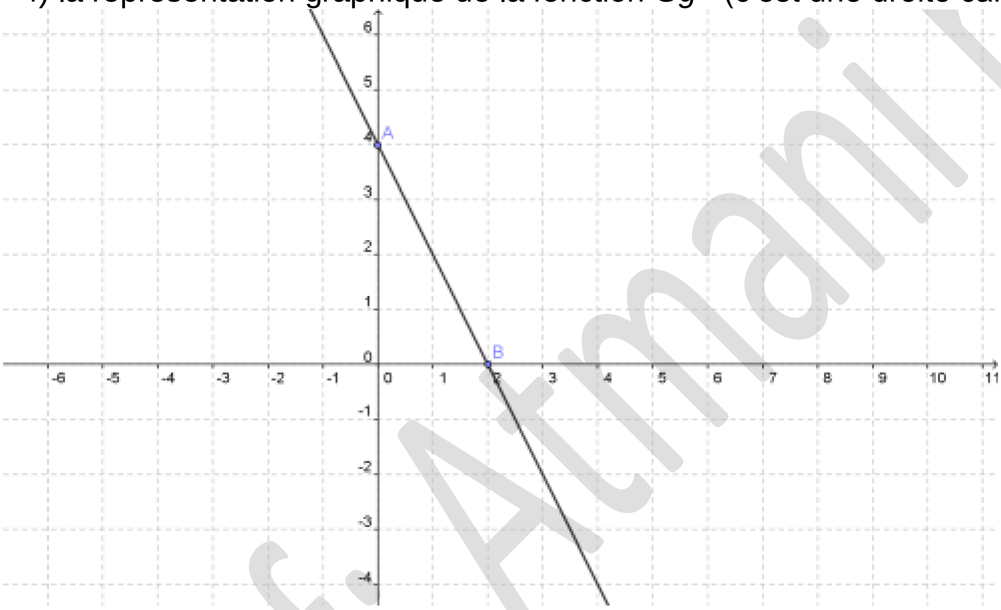
Donc $-2x_1 + 4 \succ -2x_2 + 4$ Alors $g(x_1) \succ g(x_2)$

D'où g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

3) Le tableau de variation de g



4) la représentation graphique de la fonction Gg (c'est une droite car g est une fonction affine)



Prof/ATMANI NAJIB

Exemple2 : Soient la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2}{x}$

Etudier la monotonie de f

Solution : $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tq $x_1 \prec x_2$ Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

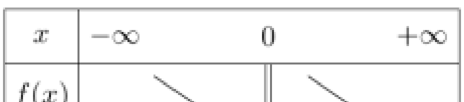
Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ tq $x_1 \prec x_2$

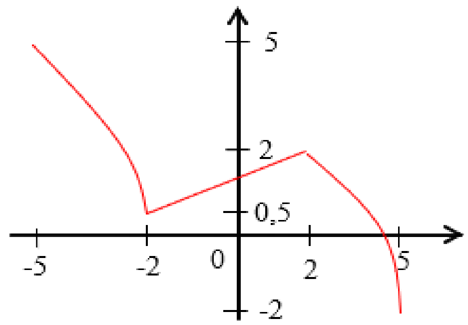
Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b) **tableau de variation :**



Exemple3 : Determiner le **tableau de variation** la fonction f définie par la representation suivante :



Solution :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	$\searrow$	$0,5$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a)Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tq $x_1 \neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté $T\left(x_1;x_2\right)$ est tq : $T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

• On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_{\acute{e}} \in I$ et $x_1 \neq x_2$

on a $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2} \succ 0$ $\left(\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2} \geq 0\right)$

• On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_{\acute{e}} \in I$ et $x_1 \neq x_2$

on a $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2} \prec 0$ $\left(\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2} \leq 0\right)$

• On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_{\acute{e}} \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=0$

Exemple1 : Soit f une fonction tq : $f\left(x\right)=3x+2$

Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

1) Déterminer le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

2) En déduire les variations de f

3) Dresser le tableau de variation de g

Solution :1) f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T\left(x_1;x_2\right)=\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{\left(3x_1+2\right)-\left(3x_2+2\right)}{x_1-x_2}$$

$T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{3x_1+2-3x_2-2}{x_1-x_2}=\dfrac{3\left(x_1-x_2\right)}{x_1-x_2}$

2) On a : $T\left(x_1;x_2\right)=3\succ 0$

D’où : f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3) Le tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

Exemple2 : Soit f une fonction tq : $g\left(x\right)=-2x+1$

Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$

1) Déterminer le taux d’accroissement (taux de variation) de la fonction gentre x_1 et x_2

2) En déduire les variations de g

3) Dresser le tableau de variation de g

Solution :1) g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

On appelle Le taux d’accroissement (taux de variation) de la fonction g entre x_1 et x_2

Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$

$T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\dfrac{\left(-2x_1+1\right)-\left(-2x_2+1\right)}{x_1-x_2}$

$T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{-2x_1+1+2x_2-1}{x_1-x_2}=\dfrac{-2\left(x_1-x_2\right)}{x_1-x_2}$

2) On a : $T\left(x_1;x_2\right)=-2\prec 0$

D’où : g que est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$\searrow$

Exemple2 : Soit f une fonction tq : $f\left(x\right)=3x^2+2$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$ on a : $T\left(x_1;x_2\right)=3\left(x_1+x_2\right)$

a)Soit $x_1\in\left[0;+\infty\right[$ et $x_2\in\left[0;+\infty\right[$

Donc $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$ Donc $x_1+x_2\geq 0$ Donc $3\left(x_1+x_2\right)\geq 0$ car $3\succ 0$

Donc $T\left(x_1;x_2\right)=3\left(x_1+x_2\right)\geq 0$

D’où f que est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$

b) Soient $x_1\in\left]-\infty;0\right]$ et $x_2\in\left]-\infty;0\right]$

Donc $x_1\leq 0$ et $x_2\leq 0$ Donc $x_1+x_2\leq 0$ Donc $3\left(x_1+x_2\right)\leq 0$ car $3\succ 0$

Donc $T\left(x_1;x_2\right)=3\left(x_1+x_2\right)\leq 0$

D’où f que est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$

b) <u>résumé</u> : **tableau de variation :** $f\left(0\right)=3\times 0^2+2=2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

c) les variations et la parité :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Exemple: Soit f une fonction tel que : $f(x) = 3x^2$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1 \neq x_2$

3) Étudier les variations de f sur $I = [0;+\infty[$

4) En déduire les variations de f sur D_f

5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$

2) soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2) - (3x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

3) On a : $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2)$

$x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ Donc $x_1 + x_2 \geq 0$ Donc $3(x_1 + x_2) \geq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

D'où f que est croissante sur $[0;+\infty[$

4) on a : f est paire et le symétrique de $I = [0;+\infty[$ est l'intervalle $J =]-\infty;0]$ et f que est croissante sur $[0;+\infty[$ D'où f que est décroissante sur $]-\infty;0]$

5) le tableau de variations de f sur D_f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 2 \times 0^2 = 0$

V) Les extremums d'une fonction numérique

Propriétés : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I =]a;b[$

(a et b dans $\mathbb{R}$) et soit $c \in I$

- Si f est croissante sur $[a;c]$ et décroissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur maximale de f sur I
- Si f est décroissante sur $[a;c]$ et croissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur minimale de f sur I

x	a		c		b
$f(x)$		$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	

x	a		c		b
$f(x)$		$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

Exemple: Du tableau de variation

x	-5		-2		2		5
f(x)	5	$\searrow$	0,5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Déduire les extrémums de f

Solution : Du tableau de variation on a :
Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0 = 2$
Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0 = -2$

VI) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2$

1iér cas : si $a \succ 0$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2iér cas : si $a \prec 0$

Tableau de variations de f

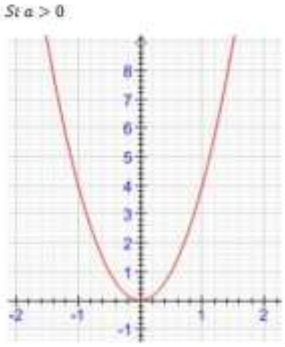
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

Prof/ATMANI NAJIB

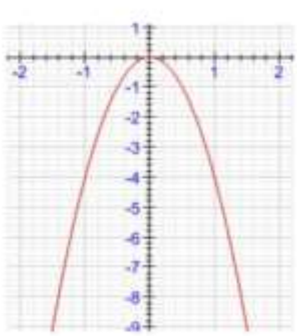
4° Représentation graphique

Définition : dans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} ax^2$
avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques sont son sommet qui est l'origine du repére et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées

Si a > 0



Si a < 0



Exemple1: Soit f une fonction tq : $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

1) Déterminer D_f

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

3) Déterminer les extremums de la fonction f

4) Tracer la courbe représentative de la fonction fdans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$

Solution : 1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

2) On a $a=\frac{1}{2}\succ 0$

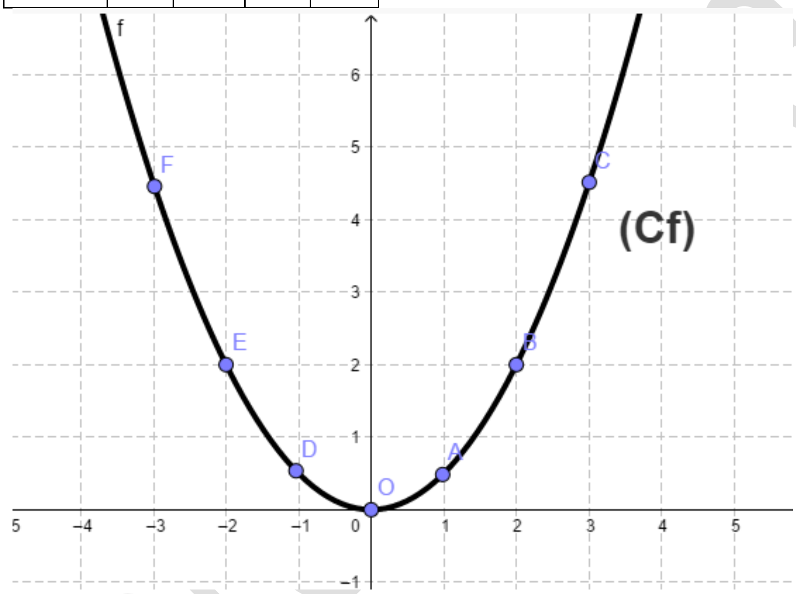
Donc : <u>Tableau de variations de f</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f(0)=2\times 0^2=0$ est une valeur minimale de f

4) Représentation graphique :

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$



Exemple2: Soit f une fonction tq : $f(x)=-\frac{3}{2}x^2$

1) Déterminer D_f

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

3) Déterminer les extremums de la fonction f

4) Tracer la courbe représentative de la fonction fdans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$

Solution : 1) $f(x)=-\frac{3}{2}x^2$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

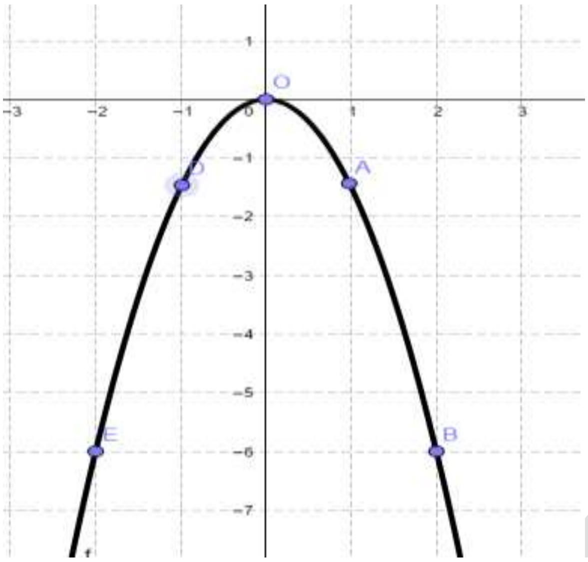
2) On a $a=-\frac{3}{2}\prec 0$ donc : <u>Tableau de variations de f</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↗	0	↘ $+\infty$

3) $f(0)=-\frac{3}{2}\times 0^2=0$ est une valeur Maximale de f

4) Représentation graphique :

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$-\frac{3}{2}$	-6	$-\frac{27}{2}$



VII) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2+bx+c$

Propriétés : 1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=ax^2+bx+c$

Avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$

1° On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

Avec $\Delta=b^2-4ac$ et On pose $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}$

la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$

2° Les variations de f

Si $a\succ 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

Si $a\prec 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

Exemple1 : Soit f une fonction tq : $f(x)=2x^2+4x-2$

1) Déterminer D_f

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

3) Déterminer les extremums de la fonction f

4) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$

On peut utiliser le tableau des valeurs suivant qu'il faut remplire

x	-4	-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
f(x)							

Solution : 1) $f(x)=2x^2+4x-2$

On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

2) On a $a=2$ et $b=4$ et $c=-2$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\Delta=b^2-4ac=16-4\times(-2)\times2=16+16=32$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\times2}=1$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{32}{4\times2}=-4$

$\left(f(1)=2-4-2=-4\right)$

<u>Tableau de variations de f</u>

On a $a=2\succ0$ donc :

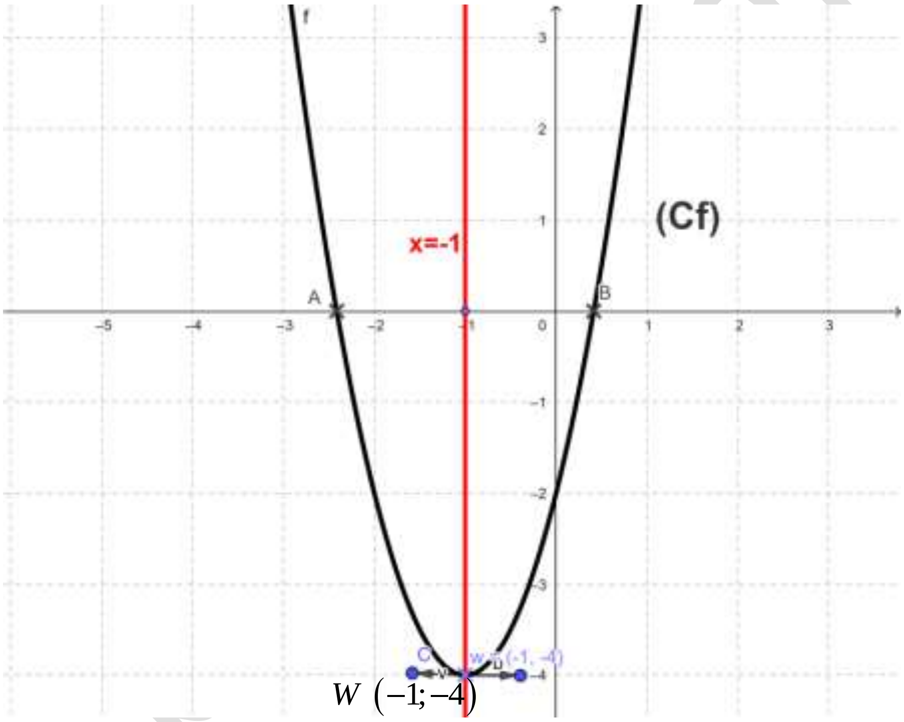
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

3) $f(1)=-4$ est une valeur minimale de f

4) la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

x	-4	-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
f(x)	14	4	-2	-4	-2	4	14

Prof/ATMANI NAJIB



Exemple2 : Soit f une fonction tq : $g(x)=-x^2-2x+1$

1) Déterminer D_g

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_g

3) Déterminer les extremums de la fonctiong

4) Tracer la courbe représentative de la fonction gdans un Repére orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$

On peut utiliser le tableau <u>des valeurs suivant qu'il faut remplire</u>

x	-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
f(x)						

Solution : 1) On a g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

2)On a $a=-1$ et $b=-2$ et $c=1\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\Delta=b^2-4ac=4-4\times(-1)\times1=4+4=8$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{8}{-4}=2$

$\left(g(-1)=-(-1)^2-2\times(-1)+1=-1+2+1=2\right)$

la courbe $\left(C_g\right)$ c'est une parabole de sommet $W(-1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

Tableau de variations de g

On a $a=-1\prec0$ donc :

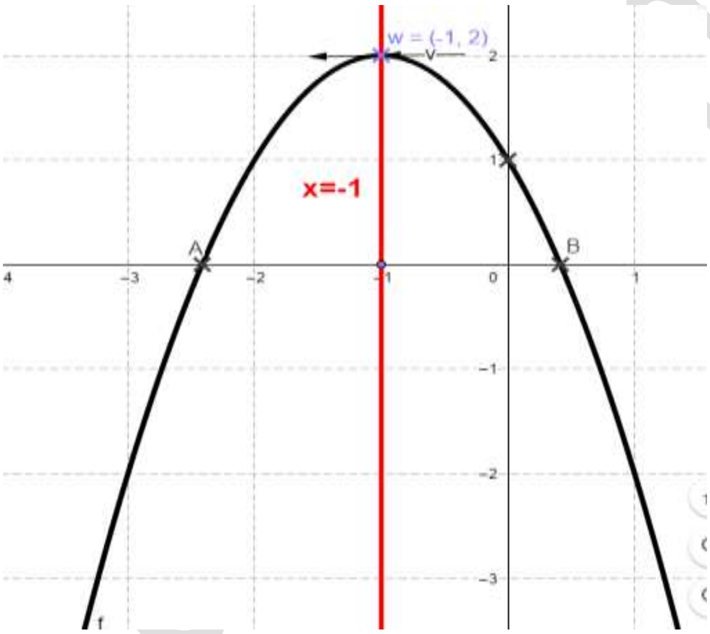
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

3) $f(-1)=2$ est une valeur maximal de g

4) la courbe $\left(C_g\right)$ c'est une parabole de sommet $W(-1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

Le tableau des valeurs est :

x	-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
gx)	-2	1	2	1	-2	1



VIII) Etude et représentation graphique des fonctions : $x\xrightarrow{f}\frac{a}{x}\left(a\in\mathbb{R}^*\right)$

Résumé : $f(x)=\frac{a}{x}\left(a\in\mathbb{R}^*\right)$

a) 1iér cas : si $a\succ0$

Tableau de variations de f si $a\succ0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

2iér cas : si $a \prec 0$

Tableau de variations de f si $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

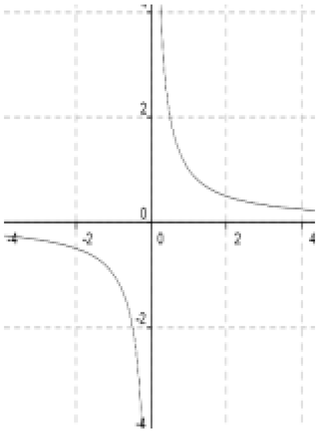
Définition : dans un Repére orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ dont les éléments caractéristiques sont :

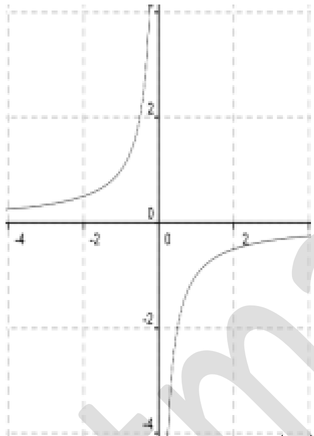
son centre de symétrie qui est l'origine du repére et Ses deux asymptotes qui sont l'axe des abscisses et l'axe
des ordonnées

Représentation graphique

si $a \succ 0$



si $a \prec 0$



Exemple1 : Soient la fonction f définie par : $f\left(x\right) = \frac{2}{x}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier La parité de la fonction f

3)a)Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$

b) Montrer que f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$

4) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

5) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un Repére orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$

Solution : 1)$f\left(x\right) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

2)La parité de la fonction :

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$f\left(-x\right) = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x}$ Donc f est une fonction impaire

$f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$

3)a) Soit $x_1 \in \left[0;+\infty\right[$ et $x_2 \in \left[0;+\infty\right[$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f\left(x_1\right) \succ f\left(x_2\right)$ d'où f que est strictement décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$

3)b) Soit $x_1 \in \left]-\infty;0\right]$ et $x_2 \in \left]-\infty;0\right]$ tels que : $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

4) tableau de variation :

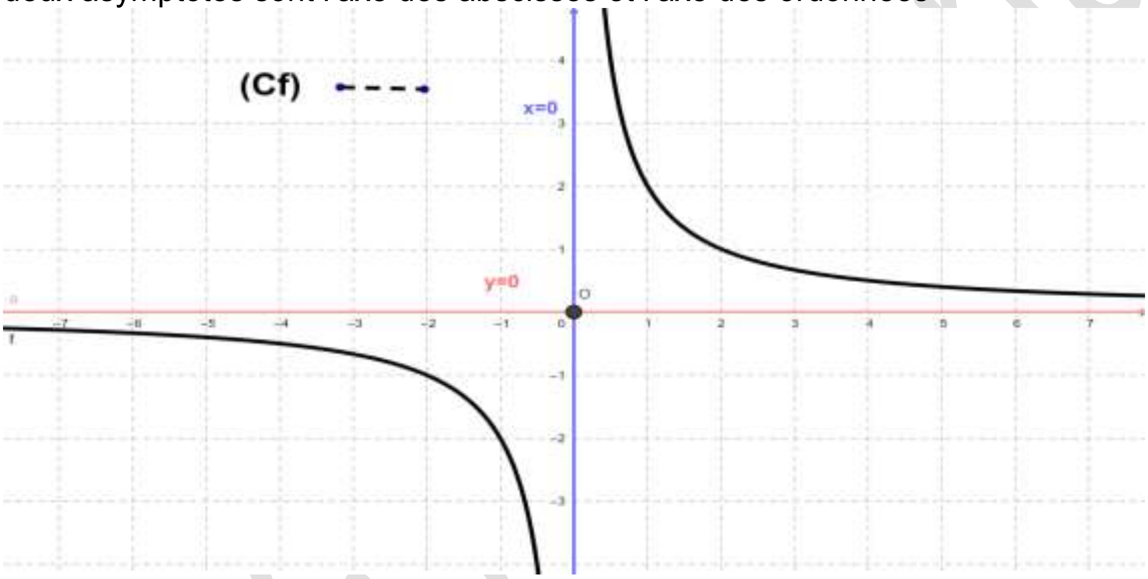
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	||	$\searrow$

5) la courbe représentative de la fonction

Tableau des valeurs :

x	0	1	2	3
$f(x)$		2	1	$\frac{2}{3}$

Dans un Repére orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f est une hyperbole dont les éléments caractéristiques sont : son centre de symétrie qui est l'origine du repére et Ses deux asymptotes sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées



Exemple2 : Soit f une fonction tq : $g(x) = \frac{-3}{x}$

1) Déterminer D_g

2) Etudier La parité de la fonction f

3)a)Montrer que g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

b) Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$

4) Dresser le tableau de variations de g sur D_g

5) Tracer la courbe représentative de la fonction g dans un Repére orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$

Solution : 1) On a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

Donc $D_g = \mathbb{R}^*$

<u>2)La parité de la fonction g</u> :

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
- $g(-x) = \frac{-3}{-x} = -\frac{-3}{x}$ Donc g est une fonction impaire,

$g(-x) = -g(x)$

3) a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{-3}{x_1} \prec \frac{-3}{x_2}$ car $-3 \prec 0$

Alors $g(x_1) \prec g(x_2)$ d'où g que est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{-3}{x_1} \prec \frac{-3}{x_2}$ car $-3 \prec 0$

Alors $g(x_1) \prec g(x_2)$ d'où g que est strictement croissante sur $]-\infty;0]$

4) Tableau de variation :

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

5) Représentation graphique

Dans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$la courbe représentative de la fonction g est une hyperbole dont les éléments caractéristiques sont : son centre de symétrie qui est l'origine du repére et Ses deux asymptotes qui sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

Tableau des valeurs :

x	0	1	2	3
$g(x)$		-3	$-\frac{3}{2}$	-1

$g(x) = \frac{-3}{x}$