Leçon5 : Géométrie analytique: Partie1

: Le repère dans le plan

Présentation globale

1) Le repère, le repère orthogonal et le repère orthonormé ;
2) Coordonnées d'un point, coordonnées du milieu d'un segment, distance de deux points.

Capacités attendues

- Représenter un point connaissant ses coordonnées ;
- Determiner les Coordonnées d'un point et les coordonnées du milieu d'un segment
- Calculer la distance entre deux points

Recommandations pédagogiques

On fixera et on complètera les acquis des élèves surtout ceux qui seront utiles pour L'interprétation de quelques notions en statistique, en analyse et dans la résolution d'équations, d'inéquations et des systèmes.

I) Repère et coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur

1) Le Repère dans le plan :

Soient O. I et J trois points non alignés dans le plan P.
Le triplet (O ; I ; J) détermine un Repère dans le plan.
On le note R (O ; I ; J)
Le point O est l'origine du Repère (O ; I ; J)
La droite (O I) est l'axe des abscisses du Repère (O ; I ; J)
La droite (O J) est l'axe des ordonnées du Repère (O ; I ; J)
Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires ont dit que le Repère est orthogonal
Si on a OI =OJ = 1 ont dit que le Repère (O ; I ; J) est normé
Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires et si on a OI =OJ = 1 ont dit que le Repère (O ; I ; J) est orthonormé
On pose $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ on note alors le Repère (O ; I ; J) par $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

2) Les coordonnées d'un point :

<u>Propriété et définition :</u> Le plan est rapporté au Repère (O ; I ; J).Pour tout point M du plan il existe un unique couple (x,y) tel que $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$

Le couple (x,y) est le couple de coordonnée de M et on note : $M(x,y)$:
x est l'abscisse du point M et y est l'ordonnée du point M

<u>Application :</u> Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Construire les points :
$A(-4;2)$; $B(-2;3)$; $C(-3;3)$; $E(0;4)$; $F(-3;0)$

4) Les coordonnées d'un vecteur et du milieu d'un segment et la distance entre points:

<u>Propriétés :</u> Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Soient $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $I(x_I;y_I)$ trois points dans le plan

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$ et $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$\vec{u}(x;y)=\vec{v}(x';y')$ ssi $x'=x$ et $y=y'$

Exemple: Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et soient $A(1;2)$; $B(-5;4)$

Déterminer les coordonnée de I le milieu du segment [AB] et calculer $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Réponse :1) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2}\right)$

Donc : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{1+(-5)}{2};\frac{2+4}{2}\right)$ donc : $I(-2;3)$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Exercice : Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Soients les points A (-2 ; 1) et B (1 ; −1).
1) Calculer les coordonnées du point M tel que A soit le milieu du segment [BM]
2) Calculer les coordonnées du point N, symétrique de A par rapport à` B .
3) Démontrer que [AB] et [M N] ont même milieu.

Réponse 1) A le milieu du segment [BM]
Signifie que : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$.
On a : $\overrightarrow{AM}\left(x_M+2;y_M-1\right)$ et $\overrightarrow{BA}(3;-2)$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$ Signifie que : $\begin{cases}x_M+2=3\\y_M-1=-2\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x_M=1\\y_M=-1\end{cases}$ donc : $M(1;-1)$

2) N symétrique de A par rapport à *B*
Signifie que : $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}$
On a : $\overrightarrow{BN}\left(x_N-1;y_N+1\right)$ et $\overrightarrow{AB}(-3;2)$

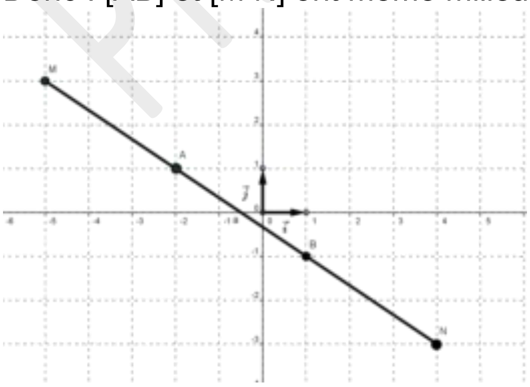
$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}$ Signifie que : $\begin{cases}x_N-1=-3\\y_N+1=2\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x_N=-2\\y_N=1\end{cases}$ donc : $N(-2;1)$

3) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2}\right)$ c'est-à-dire : $I\left(\frac{-1}{2};0\right)$

Le milieu J du segment [M N] a pour coordonnées $J\left(\frac{x_M+x_N}{2};\frac{y_M+y_N}{2}\right)$ c'est-à-dire : $J\left(\frac{-1}{2};0\right)$

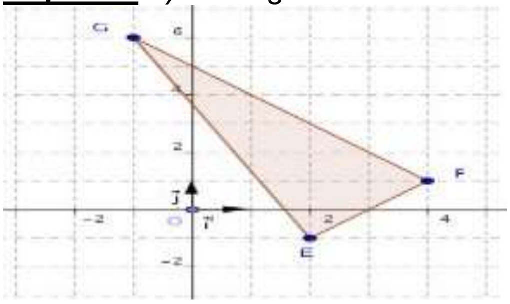
Donc : [AB] et [M N] ont même milieu car : $I=J$



Exercice : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) Placer les points E (2 ; −1), F (4 ; 1) et G (-1 ; 6).
2) Quelle est la nature du triangle EFG ?

Réponse 1) Voir figure



2) Calculons les distances suivantes :
EF et FG et EG.

$EF = \left\|\overrightarrow{EF}\right\| = \sqrt{\left(x_F - x_E\right)^2 + \left(y_F - y_E\right)^2} = \sqrt{\left(4-2\right)^2 + \left(1+1\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$EG = \left\|\overrightarrow{EG}\right\| = \sqrt{\left(x_G - x_E\right)^2 + \left(y_G - y_E\right)^2} = \sqrt{\left(-1-2\right)^2 + \left(6+1\right)^2} = \sqrt{58}$

$FG = \left\|\overrightarrow{FG}\right\| = \sqrt{\left(x_G - x_F\right)^2 + \left(y_G - y_F\right)^2} = \sqrt{\left(-1-4\right)^2 + \left(6-1\right)^2} = \sqrt{50}$ On a : $EF^2 + FG^2 = 8 + 50 = 58$ et $EG^2 = 58$

Donc : $EF^2 + FG^2 = EG^2$

Par suite d'après le théorème de Pythagore réciproque le triangle EFG est rectangle en F

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien