

## PARTIE3 : Systèmes

### Présentation globale

- Equation du premier degré à une inconnue ;
- équations se ramenant à la résolution d'équations du premier degré à une inconnue
- Signe de :  $ax + b$  et inéquations du premier degré à une inconnue ;
- Inéquations se ramenant à la résolution d'inéquations du premier degré à une inconnue ;
- Equation du second degré à une inconnue,
- Factorisation d'un trinôme ;
- Equations du premier degré à deux inconnues ;
- Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues (méthodes de résolution : substitution, combinaison linéaire).

### Capacités attendues

- Résoudre des équations du premier degré et du second degré à une inconnue et des équations précédentes ;
- Factoriser un trinôme du second degré en utilisant différentes techniques ;
- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue et des inéquations se ramenant à la résolution des inéquations précédentes ;
- Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues ;
- Mathématiser des situations qui se ramènent à la résolution des équations, des inéquations et des systèmes précédents.

### Recommandations pédagogiques

- Les techniques de résolution des équations et inéquations du premier degré à une inconnue ont été étudiées au collège, il faudra renforcer cette pratique par l'étude de quelques exemples Simple ;
- En utilisant le discriminant dans la résolution des équations du second degré, on donnera aussi une importance aux autres techniques (factorisation, forme canonique...)
- Les équations paramétriques du premier et du second degré sont hors programme ;
- Des problèmes, issus de la vie quotidienne ou des autres matières (qui sont en relation avec l'avenir de l'élève : économie, géographie...), devront être proposés dans le but d'habituer les élèves à mathématiser des situations et de les résoudre.

### I) Les équations du premier degré avec deux inconnues.

1) **Activité** : Soit dans  $\mathbb{R}^2$  l'équation :  $2x - y + 4 = 0$

1) Vérifier que les couples :  $(0;4)$  et  $(1;6)$  sont solution de l'équation :  $2x - y + 4 = 0$

2) Pourquoi  $(1;2)$  n'est pas solution de l'équation ?

3) Donner deux autres couples solution de l'équation :  $2x - y + 4 = 0$

4) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  l'équation :  $2x - y + 4 = 0$

**Solution : a)**  $2 \times 0 - 4 + 4 = -4 + 4 = 0$

Donc :  $(0;4)$  est solution de l'équation :  $2x - y + 4 = 0$

b)  $2 \times 1 - 6 + 4 = 2 - 6 + 4 = 0$

Donc :  $(1;6)$  est solution de l'équation :  $2x - y + 4 = 0$

2) On a :  $2 \times 1 - 2 + 4 = 2 - 2 + 4 = 4 \neq 0$

Donc :  $(1; 2)$  n'est pas solution de l'équation :  $2x - y + 4 = 0$

3) on donne par exemple à  $x$  une valeur et on cherche  $y$  :

a) Par exemple :  $x = 2$  donc :  $2 \times 2 - y + 4 = 0$  Équivalent à :  $-y + 8 = 0$

Équivalent à :  $y = 8$  donc : Donc :  $(2; 8)$  est solution de l'équation

a) Par exemple :  $x = -1$  donc :  $2 \times (-1) - y + 4 = 0$  Équivalent à :  $-y + 2 = 0$

Équivalent à :  $y = 2$  donc : Donc :  $(-1; 2)$  est solution de l'équation

**Remarques** : L'équation  $2x - y + 4 = 0$  a une infinité de solutions

4) Résolvons dans  $\mathbb{R}^2$  l'équation :  $2x - y + 4 = 0$

On a  $2x - y + 4 = 0$  équivalent à :  $y = 2x + 4$  Donc :  $S = \{(x; 2x + 4) / x \in \mathbb{R}\}$

**2) Définition** : On appelle équations du premier degré à deux inconnues toute équation de la forme :  $ax + by + c = 0$  où les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels donnés et le couple  $(x; y)$

Est l'inconnue dans  $\mathbb{R}^2$ .

Résoudre l'équation dans  $\mathbb{R}^2$  c'est déterminer l'ensemble  $S$  des couples solutions

de l'équation :  $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / M(x; y) \in (D)\}$

**Exercice** : 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les équations suivantes :

1)  $3x + y - 2 = 0$     2)  $2x - y + 1 = 2y - 2x + 5$     3)  $x + 5 = y + 5$     4)  $x + y = 2x - 1$

**Solution** : 1) On a  $3x + y - 2 = 0$  équivalent à :  $y = -3x + 2$  Donc :  $S = \{(x; -3x + 2) / x \in \mathbb{R}\}$

2) On a  $2x - y + 1 = 2y - 2x + 5$  équivalent à :  $4x - 3y - 4 = 0$

Équivalent à :  $4x = 3y + 4$  équivalent à :  $x = \frac{3}{4}y + 1$     Donc :  $S = \left\{ \left( \frac{3}{4}y + 1; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$

3) On a  $x + 5 = y + 5$  équivalent à :  $y = x$  Donc :  $S = \{(x; x) / x \in \mathbb{R}\}$

4) On a  $x + y = 2x - 1$  équivalent à :  $-x + y + 1 = 0$  ssi  $y = x - 1$

Donc :  $S = \{(x; x - 1) / x \in \mathbb{R}\}$

## II) Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

**1) Définition** : On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues

toute système de la forme :  $(I) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  où les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sont des réels

donnés et le couple  $(x, y)$  est l'inconnue dans  $\mathbb{R}^2$

Résoudre le système  $(I)$  c'est déterminer l'ensemble  $S$  des solutions c a d l'ensemble des

couples  $(x, y)$  qui vérifient les deux équations:  $ax + by = c$  et  $a'x + b'y = c'$  simultanément

**Exemple** : 1) On considère le système suivant :  $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}$

les couples suivants :  $(1; 3)$  et  $(5; -1)$  sont-ils solutions de ce système ?

**Solution :** a) (1;3) ???? on  $1+3=4$  et  $1-3=-2$  donc : (1;3) vérifie les deux équations: simultanément donc : (1;3) est solution du système

b) (5;-1) ???? on a :  $5+(-1)=4$  mais  $5-(-1)=6 \neq -2$

Donc : (5;-1) ne vérifie pas les deux équations simultanément

Donc : (5;-1) n'est pas solution du système.

## 2) Résolution d'un Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Pour Résoudre un système (I) on utilise généralement quatre méthodes :

- Méthode de substitution
- Méthode de combinaison linéaire ou addition
- Méthode des déterminants

**3) Applications :** Résoudre le système suivant dans  $\mathbb{R}^2$  : 
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

Par les 3 Méthodes suivantes :

**1) Par la Méthode de substitution**

**2) Par la méthode des combinaisons linéaires**

**3) Méthode des déterminants**

**Solution :**

**1) Par la Méthode de substitution :**  $3x + y = 5$  Signifie que :  $y = 5 - 3x$

On obtient alors le système : 
$$\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

On va maintenant remplacer le  $y$  de la seconde équation par son expression en fonction

de  $x$  qu'on vient de trouver. Cela donne alors : 
$$\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x - 3(5 - 3x) = -4 \end{cases}$$

On développe et on simplifie l'écriture de la deuxième équation : 
$$\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 11x = 11 \end{cases}$$

On résout maintenant l'équation du premier degré pour trouver la valeur de  $x$  : 
$$\begin{cases} y = 5 - 3x \\ x = 1 \end{cases}$$

Maintenant qu'on connaît la valeur de  $x$ , il ne nous reste plus qu'à remplacer  $x$  par sa valeur

dans la première équation. 
$$\begin{cases} y = 5 - 3 \times 1 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ donc: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

La solution de notre système est donc :  $S = \{(1, 2)\}$

Il peut être utile de procéder à une vérification. Pour cela, on remplace les inconnues par les valeurs qu'on vient de trouver dans chacune des équations et on vérifie si on retrouve bien l'égalité

$$\begin{cases} 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5 \checkmark \\ 2 \times 1 - 3 \times 2 = 2 - 6 = -4 \checkmark \end{cases}$$

**2) Par la méthode combinaison linéaire ou méthode par addition.**

Le but de cette méthode est de multiplier les équations par des nombres judicieusement choisis pour qu'en additionnant ou soustrayant les équations on n'ait plus qu'une seule inconnue.

On va chercher, par exemple, à "éliminer" l'inconnue  $x$ . Pour cela on va :

multiplier la première équation par 2 qui est le coefficient de l'inconnue de la seconde équation.

Multiplier la seconde équation par 3 qui est le coefficient de l'inconnue de la première équation.

On obtient alors le système : 
$$\begin{cases} 6x + 2y = 10 \\ 6x - 9y = -12 \end{cases}$$

On va maintenant soustraire nos deux équations pour ainsi ne plus avoir de termes en  $x$ .

$$\begin{array}{r} 6x + 2y = 10 \\ -(6x - 9y = -12) \\ \hline 11y = 22 \\ \text{donc } y = 2 \end{array}$$

On remplace maintenant cette valeur dans l'une des deux équations :

Si on choisit la première équation  $3x + 2 = 5$  soit  $3x = 3$  et donc  $x = 1$ .

La solution du système est donc :  $S = \{(1, 2)\}$

**3) Méthode des déterminants :** On calcule le déterminant du système suivant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \times (-3) - 2 = -11 \neq 0 \quad (I) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-15 - (-4)}{-11} = \frac{-15 + 4}{-11} = \frac{-11}{-11} = 1 \quad \text{et} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-12 - 10}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2$$

Donc :  $S = \{(1, 2)\}$

**Exercice :** Résoudre les systèmes suivants dans  $\mathbb{R}^2$  :

1)  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$     2)  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$     3)  $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + 4y = -6 \end{cases}$

**Solution : 1)**  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$  Par exemple : Par la *Méthode de substitution* :

Dans le système  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ , On exprime  $x$  en fonction de  $y$  dans la première équation et on

obtient le système équivalent :  $\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ . On remplace ensuite  $x$  par  $3 - 2y$  dans la seconde

équation, ce qui donne le système :  $\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2(3 - 2y) + 3y = 4 \end{cases}$  qui équivaut à  $\begin{cases} x = 3 - 2y \\ -y + 6 = 4 \end{cases}$ ,

soit encore à  $\begin{cases} x = 3 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$

Et on remplace  $y$  par 2 dans la première équation on trouve  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

On obtient ainsi le couple solution donc :  $S = \{(-1, 2)\}$

2)  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ , On multiplie les termes de la première équation par 2 et ceux de la seconde

par 3 et on obtient le système équivalent :  $\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 9x - 6y = 12 \end{cases}$ .

On additionne membre à membre les deux équations et on remplace la seconde équation du système par le résultat ; on obtient le système  $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 13x=26 \end{cases}$  équivalent :  $\begin{cases} 8+6y=14 \\ x=2 \end{cases}$ , soit  $\begin{cases} 6y=6 \\ x=2 \end{cases}$

encore ou  $\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$ . On en déduit le couple solution :  $S = \{(2,1)\}$ .

3)  $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+4y=-6 \end{cases}$  Le déterminant est :  $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - (-1) \times 2 = 14 \neq 0$

Alors le système (I) admet un couple solution unique

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{5 \times 4 - (-6) \times (-1)}{14} = \frac{20-6}{14} = \frac{14}{14} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}}{14} = \frac{3 \times (-6) - 5 \times 2}{14} = \frac{-18-10}{14} = \frac{-28}{14} = -2$$

On en déduit le couple solution :  $S = \{(1,-2)\}$ .

**Exercice :** Résoudre les systèmes suivants en respectant la méthode demandée :

1.  $\begin{cases} 4x+2y=4 \\ 25x+5y=-5 \end{cases}$  par la méthode des combinaisons linéaires.

2.  $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ x-2y=-1 \end{cases}$  par la méthode de substitution.

3.  $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ -18x+3y=0 \end{cases}$  par la méthode de la double substitution.

**Solution : 1.**  $\begin{cases} 4x+2y=4 \\ 25x+5y=-5 \end{cases} \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+y=-1 \end{cases} \begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x=-3 \end{cases} \begin{cases} y=2-2 \times (-1)=4 \\ x=-1 \end{cases}$ . On trouve :  $S = \{(-1;4)\}$ .

2.  $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \begin{cases} 3(2y-1)-4y=1 \\ x=2y-1 \end{cases} \begin{cases} 2y=4 \\ x=2y-1 \end{cases} \begin{cases} y=2 \\ x=3 \end{cases}$ . On trouve :  $S = \{(3;2)\}$ .

3.  $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ -18x+3y=0 \end{cases} \begin{cases} y=2x-4 \\ y=6x \end{cases} \begin{cases} 6x=2x-4 \\ y=6x \end{cases} \begin{cases} 4x=-4 \\ y=6x \end{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=6 \times (-1) = -6 \end{cases}$ . On trouve :  $S = \{(-1;-6)\}$ .

**Exercice :** Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

1)  $\begin{cases} (\sqrt{5}-\sqrt{3})x+(\sqrt{2}-1)y=0 \\ (\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{5}+\sqrt{3})y=1 \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x+y=11 \\ x^2-y^2=44 \end{cases}$

**Solution : 1)**  $\begin{cases} (\sqrt{5}-\sqrt{3})x+(\sqrt{2}-1)y=0 \\ (\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{5}+\sqrt{3})y=1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{5}-\sqrt{3} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{5}+\sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) - (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$$

$$\Delta = ((\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2) - ((\sqrt{2})^2 - (1)^2)$$

Donc :  $\Delta = (5-3) - (2-1) = 1 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2}-1 \\ 1 & \sqrt{5}+\sqrt{3} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(\sqrt{2}-1)}{1} = -\sqrt{2}+1 = 1-\sqrt{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{5}-\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2}+1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{1} = -\sqrt{5}+\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{5}$$

Donc :  $S = \{(1-\sqrt{2}, \sqrt{3}-\sqrt{5})\}$

2)  $\begin{cases} x+y=11 \\ x^2-y^2=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=11 \\ (x+y)(x-y)=44 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=11 \\ 11(x-y)=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=11 \\ x-y=4 \end{cases}$

On fait la somme membre a membre on trouve :  $x+y+x-y=11+4$  c'est-à-dire :  $2x=15$

Donc :  $x = \frac{15}{2}$  et par suite :  $\frac{15}{2} + y = 11$

Donc :  $y = \frac{7}{2}$  Alors on a :  $S = \left\{ \left( \frac{15}{2}, \frac{7}{2} \right) \right\}$

**Exercice :** Un cirque propose deux tarifs d'entrée : un pour les adultes et un pour les enfants. Un groupe de trois enfants avec un adulte paie 290 DH.

On peut traduire ces données par l'équation à deux inconnues :  $3x + y = 290$

Un autre groupe de 5 enfants avec quatre adultes paie 705 DH.

1. Ecrire alors une deuxième équation et résoudre le système obtenu de deux équations à deux inconnues.

2. Donner le prix d'une entrée pour un enfant et celui d'une entrée pour un adulte.

**Solution :** 1) Si "un groupe de trois enfants avec un adulte paie 290 DH " s'écrit  $3x + y = 290$ , c'est que x, représente le tarif d'entrée pour les enfants et y le tarif d'entrée pour les adultes.

"Un autre groupe de 5 enfants avec quatre adultes paie 705 DH " s'écrira

Donc :  $5x + 4y = 705$

Et on obtient le système suivant à résoudre pour déterminer la valeur de x et y :  $\begin{cases} 3x+1y=290 \\ 5x+4y=705 \end{cases}$

Résolution du système : on résoud le système par substitution :  $\begin{cases} y=290-3x \\ 5x+4(290-3x)=705 \end{cases}$

Équivaut à :  $\begin{cases} y=290-3x \\ 5x+1160-12x=705 \end{cases}$  Équivaut à  $\begin{cases} y=290-3x \\ -7x=-455 \end{cases}$  donc :  $\begin{cases} x=65 \\ y=95 \end{cases}$

2) Le tarif enfant est de 65 DH et le tarif adulte est de 95 DH.

**Exercice :** Résoudre le système suivant :  $\begin{cases} x+y=630 \\ 18x+30y=14220 \end{cases}$

2) Dans un parc zoologique, la visite coûte 30 DH pour les adultes et 18 DH pour les enfants. A la fin d'une journée, on sait que 630 personnes ont visité le zoo et que la recette du jour est de 14220 DH. Parmi les personnes qui ont visité le zoo ce jour-là, quel est le nombre d'enfants ? Quel est le nombre d'adultes ?

**Solution :** 1) Résolution du système :  $\begin{cases} x+y=630 \\ 18x+30y=14220 \end{cases}$  Utilisons la méthode par substitution :

$\begin{cases} x+y=630 \\ 18x+30y=14220 \end{cases}$  Équivaut à :  $\begin{cases} x=630-y \\ 18x+30y=14220 \end{cases}$  Équivaut à :  $\begin{cases} x=630-y \\ 18(630-y)+30y=14220 \end{cases}$

$$\text{Équivaut à : } \begin{cases} x = 630 - y \\ 11340 - 18y + 30y = 14220 \end{cases}$$

$$\text{Équivaut à : } \begin{cases} x = 630 - y \\ 12y = 2880 \end{cases} \text{ c'est à dire : } \begin{cases} x = 390 \\ y = 240 \end{cases}$$

2) Soit  $x$  le nombre d'enfants qui ont visité le zoo et  $y$  le nombre d'adultes.

On sait que 630 personnes ont visité le zoo : cette donnée s'écrit :  $x + y = 630$

La visite coûte 30 F pour les adultes et 18 F pour les enfants. La recette du jour est de 14 220 F. Ces données s'écrivent :  $18x + 30y = 14220$

On retrouve les deux équations de la question précédente.

Par conséquent, 390 enfants et 240 adultes ont visité le zoo.

**Exercice :** 1) On considère le système suivant : 
$$\begin{cases} 45x + 30y = 510 \\ 27x + 20y = 316 \end{cases}$$

a. Les nombres  $x = 10$  et  $y = 2$  sont-ils solutions de ce système ?

b. Résoudre le système.

2. Pour les fêtes de fin d'année, un groupe d'amis souhaite emmener leurs enfants assister à un spectacle.

Les tarifs sont les suivants :

- 45 dh par adulte et 30 par enfant s'ils réservent en catégorie 1.
- 27 dh par adulte et 20 dh par enfant s'ils réservent en catégorie 2.

Le coût total pour ce groupe d'amis est de 510 dh s'ils réservent en catégorie 1 et 316 dh s'ils réservent en catégorie 2.

Déterminer le nombre d'adultes et d'enfants de ce groupe?

**Solution :** 1). a. Regardons si les nombres  $x = 10$

Et  $y = 2$  vérifient chacune des deux équations

$$45 \times 10 + 30 \times 2 = 450 + 60 = 510 \checkmark$$

$$27 \times 10 + 20 \times 2 = 270 + 40 = 310 \neq 316$$

Le couple  $(10, 2)$  n'est donc pas solution du système.

b. Nous allons résoudre ce système à l'aide de combinaisons linéaires :

$$\begin{cases} 45x + 30y = 510 & (\times 20) \\ 27x + 20y = 316 & (\times 30) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 900x \quad + \quad 600y \quad = \quad 10\ 200 \\ -( 810x \quad + \quad 600y \quad = \quad 9\ 480) \\ \hline 90x \quad \quad \quad \quad = \quad 720 \end{array}$$

donc  $x = 8$

On reporte ce résultat dans la première équation :

$$45 \times 8 + 30y = 510 \text{ soit } 360 + 30y = 510$$

$$\text{Donc : } 30y = 150 \text{ d'où : } y = 5.$$

On vérifie que le couple  $(8, 5)$  est bien solution de

la seconde équation :

$$27 \times 8 + 20 \times 5 = 216 + 100 = 316 \checkmark.$$

Par conséquent la solution du système est :  $(8, 5)$

$$\text{Par suite : } S = \{(8, 5)\}$$

2. On appelle  $A$  le nombre d'adultes et  $E$  le nombre d'enfants.

Avec la première catégorie on obtient l'équation  $45A + 30E = 510$ .

Avec la seconde catégorie on obtient l'équation  $27A + 20E = 316$ .

On est donc ramené à résoudre le système :

$$\begin{cases} 45A + 30E = 510 \\ 27A + 20E = 316 \end{cases}$$

D'après la question précédente le couple (8,5) est solution de ce système.

**Exercice :** 21 livres sont empilés les uns sur les autres ; la hauteur de la pile atteint 81 cm . Certains de ces livres ont une épaisseur de 5cm ; les autres une épaisseur de 3cm . Trouver le nombre de livre de chaque sorte.

**Solution :** Nous désignons par « x » le nombre de livres de 5 cm d'épaisseur ; par « y » le nombre de livres de 3 cm d'épaisseur.

Le nombre total de livres est de 21.

$$\text{Donc } x + y = 21$$

Les livres de 5 cm d'épaisseur ont, en centimètres, une épaisseur totale  $5x$  ; les livres de 3 cm d'épaisseur ont en centimètres, une épaisseur totale  $3y$ . La hauteur totale de la pile est de 81 cm.

$$\text{Donc : } 5x + 3y = 81$$

Les nombres « x » et « y » satisfont donc au système formé par les équations : 
$$\begin{cases} x + y = 21 \\ 5x + 3y = 81 \end{cases}$$

Réciproquement, toute solution de ce système est une solution du problème pourvu que « x » et « y » soient tous deux entiers et positifs.

Résolvons ce système : pourvu que « x » et « y » soient tous deux entiers et positifs.

$$\text{Résolvons ce système : } \begin{cases} x + y = 21 \\ 5x + 3y = 81 \end{cases}$$

On multiplie la première équation par -3

$$\text{Ce qui donne : } \begin{cases} -3x - 3y = -63 \\ 5x + 3y = 81 \end{cases}$$

On additionne les deux membres terme à terme :  $(5x + -3x) + (3y + -3y) = 81 + (-63)$

$$\text{Donc : } 2x + 0 = 18 \text{ soit } x = 9$$

$$\text{De l'équation } x + y = 21 ; 9 + y = 21 ; y = 12$$

Conclusion : il y a donc 9 livres de 5 cm et 12 livres de 3 cm, et 12 livres de 3 cm.

Vérification :

$$12 + 9 = 21 \text{ et } 5\text{cm fois } 9 + 3 \text{ fois } 12 = 81 \text{ cm}$$

**Exercice :** Pouvez-vous donner le poids de chacun ?



**Solution :**



Les nombres « x : poid du garçon » et « y poid du fille » et « z poid du chien » satisfont donc au

systeme formé par les équations :

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ y + z = 29 \\ x + z = 35 \end{cases}$$

Résolvons ce système :

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ y + z = 29 \\ x + z = 35 \end{cases} \text{ Équivaut à : } \begin{cases} y = 50 - x \\ y + z = 29 \\ x + z = 35 \end{cases} \text{ Équivaut à : } \begin{cases} y = 50 - x \\ 50 - x + z = 29 \\ x + z = 35 \end{cases}$$

Équivaut à :

$$\begin{cases} y = 50 - x \\ -x + z = 29 - 50 \\ x + z = 35 \end{cases} \text{ Équivaut à : } \begin{cases} y = 50 - x \\ -x + z = -21 \\ x + z = 35 \end{cases}$$

Résolvons le système :

$$\begin{cases} -x + z = -21 \\ x + z = 35 \end{cases} \text{ On additionne les deux membres terme à terme}$$

Donc :  $2z = 35 - 21$     Donc :  $2z = 14$     Donc :  $z = 7kg$

On reporte ce résultat dans le système :

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ y + 7 = 29 \\ x + 7 = 35 \end{cases} \text{ Donc : } \begin{cases} x + y = 50 \\ y = 29 - 7 \\ x = 35 - 7 \end{cases} \text{ Donc : } \begin{cases} x + y = 50 \\ y = 22 \\ x = 28 \end{cases}$$

Finalement :  $x = 28kg$  et  $y = 22kg$  et  $z = 7kg$