

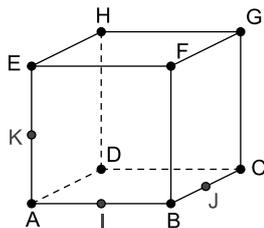
Positions relatives de droites et plans

1 $ABCDEFGH$ est un cube.
Un plan P coupe le plan (EFG) selon une droite Δ et le plan (ABC) selon une droite Δ' .
Que peut-on dire de Δ et Δ' ?

2 Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires.
1. Justifier que A, B, C ne sont pas alignés.
2. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (BCD) .

3 $ABCDEFGH$ est un cube et I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB], [BC]$ et $[AE]$.

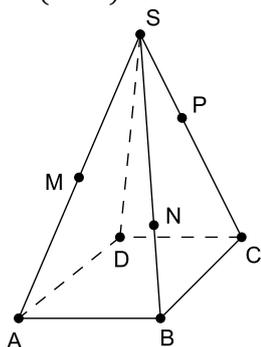
1. Citer sans justifier :
 - a. deux droites sécantes ;
 - b. deux droites parallèles ;
 - c. deux droites non coplanaires.
2. Préciser, en justifiant, la position relative :
 - a. des droites (FC) et (AF) ;
 - b. des droites (CI) et (AE) ;
 - c. des droites (EB) et (HC) .



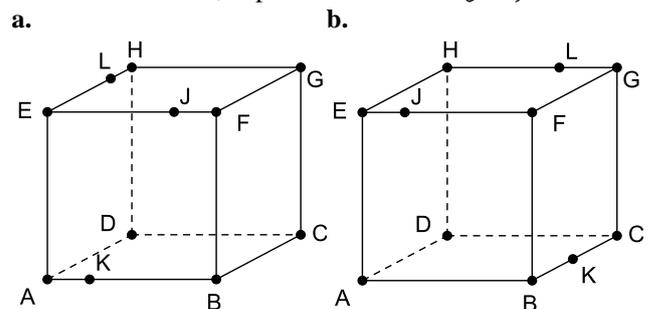
3. Préciser, en justifiant, la position relative :
 - a. de la droite (IJ) et du plan (HGF) ;
 - b. de la droite (CD) et du plan (HEA) ;
 - c. de la droite (HK) et du plan (ABE) ;
 - d. de la droite (AB) et du plan (HIJ) .
4. Préciser, en justifiant, la position relative :
 - a. des plans (DKH) et (FBJ) ;
 - b. des plans (AEF) et (AEG) ;
 - c. des plans (BDC) et (EAH) ;
 - d. des plans (ADG) et (EBC) ;
 - e. des plans (DIF) et (DBH) .

4 On considère la pyramide $SABCD$ ci-dessous. Compléter la figure au fur et à mesure.

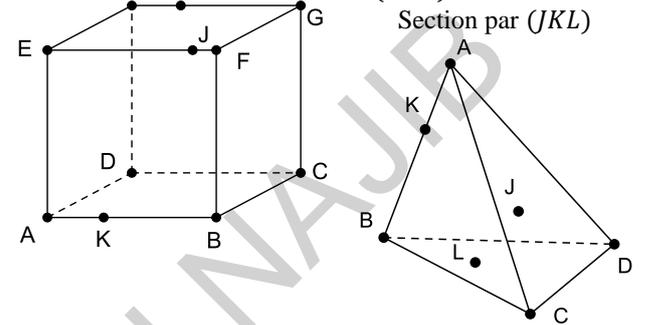
1. Déterminer le point d'intersection U de la droite (NP) et du plan (ABC) .
2. Déterminer le point d'intersection V de la droite (MN) et du plan (ABC) .
3. En déduire l'intersection des plans (MNP) et (ABC) .
4. Déterminer le point d'intersection W de la droite (DC) et du plan (MNP) .
5. En déduire l'intersection du plan (MNP) et de la face (SDC) .
6. Déterminer la section de la pyramide $SABCD$ par le plan (MNP) .



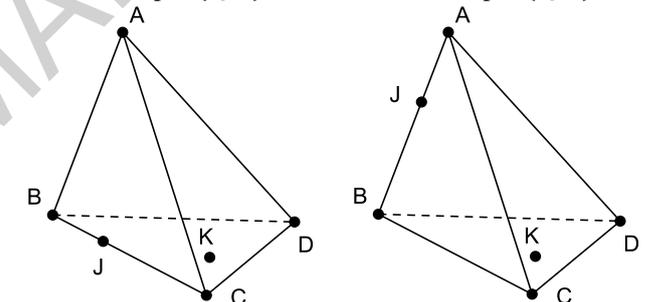
5 Construire les sections des cubes et tétraèdres suivants. Pour les trois cubes, le plan de section est (JKL) .



c. d. $K \in [AB], J \in (ABD)$ et $L \in (BCD)$.



e. $J \in [BC]$ et $K \in (BCD)$. f. $J \in [AB]$ et $K \in (BCD)$.



6 (2008, Asie). Vrai ou faux ? Justifier. Dans le cas d'une proposition fautive la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

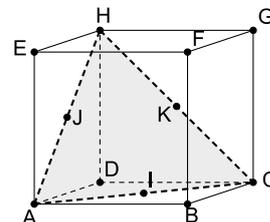
- P_1, P_2, P_3 désigne des plans distincts de l'espace et D une droite.
1. Si $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$, alors $P_1 \cap P_3 \neq \emptyset$.
 2. Si $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$, alors $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 = \emptyset$.
 3. Si $P_1 \cap D \neq \emptyset$ et $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, alors $P_2 \cap D \neq \emptyset$.

Orthogonalité

7 $ABCDEFGH$ est un cube. En utilisant la définition, démontrer l'orthogonalité des droites :

- a. (AB) et (DH) b. (AC) et (FH) c. (DC) et (FG)

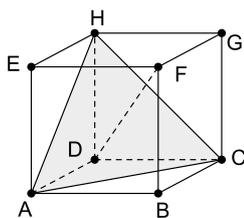
8 Soit $ABCDEFGH$ un cube et I, J, K les milieux respectifs des segments $[AC], [AH]$ et $[HC]$. Montrer que les droites (IJ) et (DK) sont orthogonales.



9 $ABCDEFGH$ est un cube et M un point de la droite (AD) . Montrer que le triangle GCM est rectangle.

10 $ABCDEFGH$ est un cube.

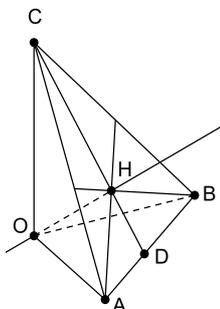
- Démontrer l'orthogonalité de la droite (CH) et du plan (ADG) .
- En déduire que les droites (CH) et (DF) sont orthogonales.
- Démontrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (ACH) .



11 $OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O , c'est-à-dire que les triangles OAB , OAC , OBC sont rectangles en O .

Soit H l'orthocentre du triangle ABC .

- Démontrer que les droites (AB) et (OH) sont orthogonales.
- Démontrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) .

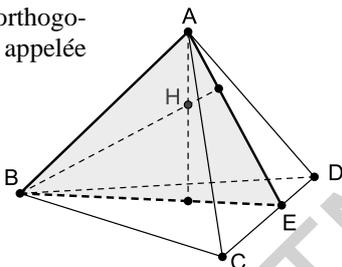


12 Tétraèdres orthocentriques

Un tétraèdre $ABCD$ possède six arêtes (AB) et (CD) , (BC) et (AD) , (CA) et (BD) qui déterminent trois paires d'arêtes dites « opposées ».

La droite passant par A et orthogonale au plan (BCD) est appelée hauteur issue de A , on la note (h_A) . On définit de même (h_B) , (h_C) , (h_D) .

Le tétraèdre $ABCD$ est dit orthocentrique si les quatre hauteurs sont concourantes.

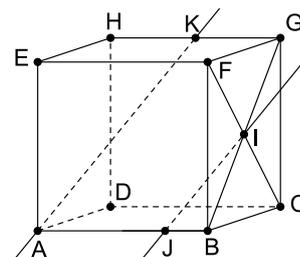


- On suppose que (h_A) et (h_B) ont un point commun H .
 - Montrer que (h_A) et (h_B) définissent un plan (P) et que (CD) est perpendiculaire à (P) .
 - En déduire que (AB) et (CD) sont orthogonales.
 - Soit $E = (P) \cap (CD)$. À l'aide de triangles rectangles, montrer que $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 = EC^2 - ED^2$.
- Montrer que dans un tétraèdre orthocentrique, le pied de la hauteur sur une face est l'orthocentre de cette face et que $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.
- Réciproquement, on suppose que (AB) et (CD) sont orthogonales. Soit E le pied de la hauteur issue de B dans le triangle BCD .
 - Montrer que les hauteurs issues de A et B dans le triangle ABE sont des hauteurs du tétraèdre.
 - En déduire que (h_A) et (h_B) sont sécantes en un point H .
 - Montrer que (AB) est perpendiculaire à (CDH) .
 - En déduire que (CH) et (AB) sont orthogonales, ainsi que les droites (DH) et (AB) .
- On suppose de plus que (AC) et (BD) sont orthogonales.
 - Montrer que (CH) est la hauteur issue de C du tétraèdre.
 - Déduire de 1. que (AD) et (BC) sont orthogonales.
 - En déduire que (DH) est la quatrième hauteur du tétraèdre.
 - Énoncer une condition suffisante pour qu'un tétraèdre soit orthocentrique.

Vecteurs de l'espace

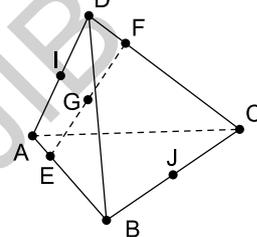
13 $ABCDEFGH$ est le cube représenté ci-contre. I est le centre de la face $BCGF$, K est le milieu de $[HG]$ et J le point tel que $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BA}$.

- À l'aide de la relation de Chasles, démontrer que $\vec{AK} = 2\vec{JI}$.
- Que peut-on en déduire pour les deux droites (AK) et (IJ) ?



14 $ABCD$ est un tétraèdre et λ un réel. Soit I et J les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$. On définit E et F par $\vec{AE} = \lambda\vec{AB}$ et $\vec{DF} = \lambda\vec{DC}$. Soit G le milieu de $[EF]$.

- Exprimer le vecteur \vec{GE} en fonction des vecteurs \vec{GA} et \vec{GB} .
 - Exprimer de même le vecteur \vec{GF} en fonction des vecteurs \vec{GD} et \vec{GC} .
- Démontrer que $(1 - \lambda)\vec{GI} + \lambda\vec{GJ} = \vec{0}$.
 - En déduire que I, J et G sont alignés.



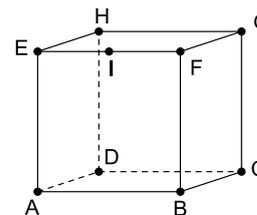
15 $ABCD$ est un tétraèdre, G est le centre de gravité de la face ACD et M est le point tel que $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BA}$.

- Démontrer que la droite (MG) est la parallèle à la droite (BI) où I est le milieu de $[CD]$.
- En déduire que la droite (MG) est parallèle au plan (BCD) .

Vecteurs coplanaires et base de l'espace

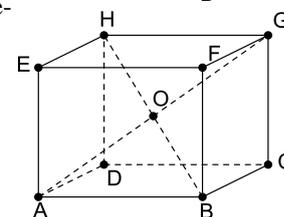
16 $ABCDEFGH$ est le cube ci-contre, I est le milieu de l'arête $[EF]$. Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont coplanaires ou non et justifier.

- \vec{AB}, \vec{AE} et \vec{DG} ;
- \vec{BC}, \vec{DH} et \vec{EI} ;
- \vec{GC}, \vec{FE} et \vec{IA} ;
- \vec{BC}, \vec{DH} et \vec{CI} ;



17 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle de centre O .

- Démontrer que les vecteurs \vec{OA}, \vec{GE} et \vec{DH} sont coplanaires.
- Les vecteurs \vec{OA}, \vec{GE} et \vec{DA} sont-ils coplanaires ?



18 Soit $\vec{u}(-2; 3; 1)$, $\vec{v}(1; 0; 3)$ et $\vec{w}(1; 2; -1)$.

- Montrer que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
- Exprimer $\vec{t}(1; 7; 2)$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

19 On considère les vecteurs $\vec{u}(0; -1; 1)$, $\vec{v}(-2; -1; 3)$, $\vec{w}(-1; -1; -1)$ et $\vec{t}(-2; 1; 1)$.

Les triplets $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ sont-ils des bases de l'espace ?

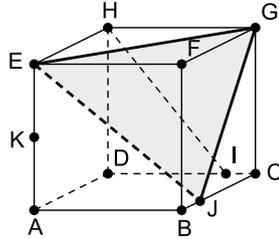
Repérage dans l'espace

20 Montrer que les points de coordonnées $A(-2; -1; 6)$, $B(1; 3; 5)$ et $C(13; 19; 1)$ sont alignés.

21 On considère les points $A(-1; -4; 5)$, $B(2; 0; 3)$, $C(-8; -11; -8)$ et $D(-4; -15; 12)$.

1. Donner les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.
2. Les points A, B, M sont-ils alignés ?

22 $ABCDEFGH$ est le cube ci-contre. On considère les points I et J définis par $\overrightarrow{DI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Déterminer les coordonnées des points E, G, H, I et J .
2. a. Démontrer qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{HI} = x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{EJ}$.
b. En déduire que (HI) est parallèle à (EGJ) .

23 Montrer que les points $A(1; 2; 3)$, $B(3; 2; 6)$, $C(1; 4; 2)$ et $D(-1; 4; -1)$ sont coplanaires.

24 Montrer que les points $A(-4; 5; -1)$, $B(-1; 5; -4)$, $C(-2; 12; 4)$ et $D(4; 12; -2)$ sont coplanaires.

25 Soit $A(1; 2; 4)$, $B(3; 1; 3)$ et $C(2; 6; 5)$.

1. Démontrer que A, B, C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le point $D(a; b; c)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si $a - b + 3c = 11$.

26 Soit les points $A(3; 2; 1)$, $B(10; 6; -1)$, $C(9; 8; -9)$ et $D(2; 4; -7)$.

1. Démontrer que ces points sont coplanaires.
2. Montrer que $ABCD$ est un losange.

27 $ABCDEFGH$ est un cube, I est le centre de gravité du triangle BEG . En se plaçant dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ montrer que les points D, I, F sont alignés.

Représentations paramétriques

28 Soit (d) la droite passant par $A(2; 7; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de (d) .
2. Déterminer le point d'ordonnée 3 de la droite (d) .

29 Donner une représentation paramétrique de (AB) dans chacun des cas suivants.

- a. $A(2; -1; 3)$ et $B(0; 2; 4)$.
- b. $A(1; 2; 3)$ et $B(-1; -2; 2)$.

30 Soit (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -2 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

1. Le point $A(-2; -4; 13)$ appartient-il à (d) ?
2. Soit les points $B(1; 4; 2)$ et $C(-11; 0; 22)$. La droite (BC) est-elle parallèle à (d) ?
3. Donner une représentation paramétrique de (BC) .

31 Soit (d) et (d') les droites de représentations paramétriques $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 4t, t \in \mathbb{R} \text{ et} \\ z = 1 - 6t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k, k \in \mathbb{R}. \\ z = -6 + 2k \end{cases}$. Démontrer que ces droites sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

32 Soit (d) et (d') les droites de représentations paramétriques $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \text{ et} \\ z = 2 - t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 2k \\ y = 3 + k, k \in \mathbb{R}. \\ z = -2 + 3k \end{cases}$. Démontrer que ces droites ne sont pas coplanaires.

33 Soit les points $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$ et $C(4; 5; 6)$.
1. Justifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.
2. Donner une représentation paramétrique du plan (ABC) .
3. Le point $D(7; 9; 11)$ appartient-il au plan (ABC) ?

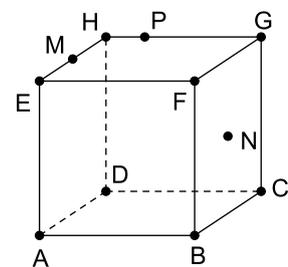
34 Soit $A(-1; 3; 2)$ et $B(2; 1; -2)$. Déterminer l'intersection de (AB) avec le plan passant par O et dirigé par \vec{i} et \vec{j} .

35 La droite (d) passe par le point $A(0; 2; 3)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; 1; 1)$. La droite (d') passe par les points $B(2; 0; -1)$ et $C(4; -2; 2)$. Étudier la position relative de ces droites.

36 Soit les points $A(4; -4; 3)$, $B(2; -1; 4)$, $C(-3; 5; 5)$, $D(-2; 2; 5)$, $E(-4; 5; 6)$ et $F(3; 2; 4)$. Déterminer une équation paramétrique à coefficient entiers de l'intersection des plans (ABC) et (DEF) .

37 (2014, Amérique du Nord)¹. On considère un cube $ABCDEFGH$ donné ci-dessous.

On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.



Partie A – Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L . Construire le point L .
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection. On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
 - a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
 - b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF) .
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP) .

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L .
3. On admet que le point T a pour coordonnées $(1; 1; \frac{5}{8})$. Le triangle TPN est-il rectangle en T ?