

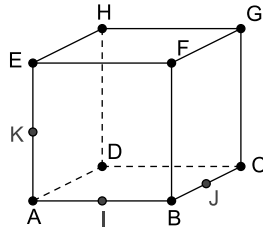
**Positions relatives de droites et plans**

**1**  $ABCDEFGH$  est un cube.  
Un plan  $P$  coupe le plan  $(EFG)$  selon une droite  $\Delta$  et le plan  $(ABC)$  selon une droite  $\Delta'$ .  
Que peut-on dire de  $\Delta$  et  $\Delta'$  ?

**2** Soit  $A, B, C, D$  quatre points non coplanaires.  
1. Justifier que  $A, B, C$  ne sont pas alignés.  
2. Déterminer l'intersection des plans  $(ABC)$  et  $(BCD)$ .

**3**  $ABCDEFGH$  est un cube et  $I, J, K$  sont les milieux respectifs des arêtes  $[AB], [BC]$  et  $[AE]$ .

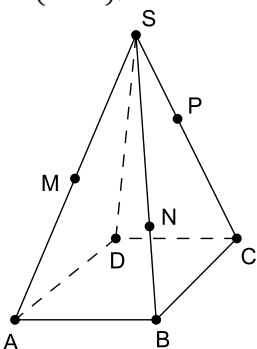
1. Citer sans justifier :
  - a. deux droites sécantes ;
  - b. deux droites parallèles ;
  - c. deux droites non coplanaires.
2. Préciser, en justifiant, la position relative :
  - a. des droites  $(FC)$  et  $(AF)$  ;
  - b. des droites  $(CI)$  et  $(AE)$  ;
  - c. des droites  $(EB)$  et  $(HC)$ .



3. Préciser, en justifiant, la position relative :
  - a. de la droite  $(IJ)$  et du plan  $(HGF)$  ;
  - b. de la droite  $(CD)$  et du plan  $(HEA)$  ;
  - c. de la droite  $(HK)$  et du plan  $(ABE)$  ;
  - d. de la droite  $(AB)$  et du plan  $(HIJ)$ .
4. Préciser, en justifiant, la position relative :
  - a. des plans  $(DKH)$  et  $(FBJ)$  ;
  - b. des plans  $(AEF)$  et  $(AEG)$  ;
  - c. des plans  $(BDC)$  et  $(EAH)$  ;
  - d. des plans  $(ADG)$  et  $(EBC)$  ;
  - e. des plans  $(DIF)$  et  $(DBH)$ .

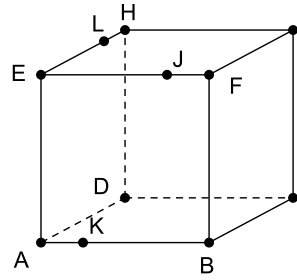
**4** On considère la pyramide  $SABCD$  ci-dessous. Compléter la figure au fur et à mesure.

1. Déterminer le point d'intersection  $U$  de la droite  $(NP)$  et du plan  $(ABC)$ .
2. Déterminer le point d'intersection  $V$  de la droite  $(MN)$  et du plan  $(ABC)$ .
3. En déduire l'intersection des plans  $(MNP)$  et  $(ABC)$ .
4. Déterminer le point d'intersection  $W$  de la droite  $(DC)$  et du plan  $(MNP)$ .
5. En déduire l'intersection du plan  $(MNP)$  et de la face  $(SDC)$ .
6. Déterminer la section de la pyramide  $SABCD$  par le plan  $(MNP)$ .

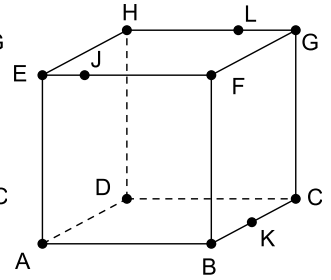


**5** Construire les sections des cubes et tétraèdres suivants. Pour les trois cubes, le plan de section est  $(JKL)$ .

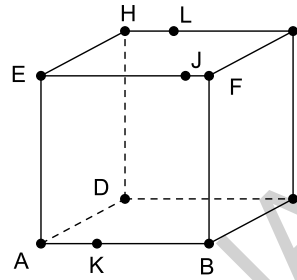
a.



b.

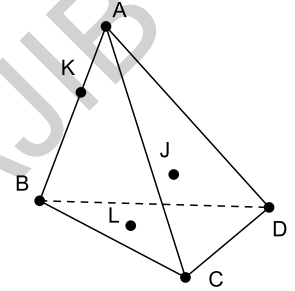


c.

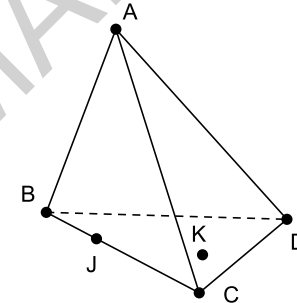


d.  $K \in [AB], J \in (ABD)$  et  $L \in (BCD)$ .

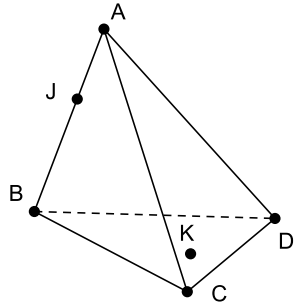
Section par  $(JKL)$



e.  $J \in [BC]$  et  $K \in (BCD)$ . Section par  $(AJK)$ .



f.  $J \in [AB]$  et  $K \in (BCD)$ . Section par  $(AJK)$



**6** (2008, Asie). Vrai ou faux ? Justifier. Dans le cas d'une proposition fautive la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

$P_1, P_2, P_3$  désigne des plans distincts de l'espace et  $D$  une droite.

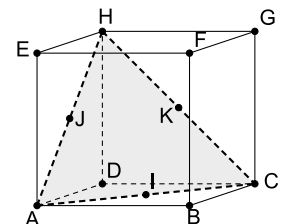
1. Si  $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$  et  $P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$ , alors  $P_1 \cap P_3 \neq \emptyset$ .
2. Si  $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$ , alors  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$  et  $P_2 \cap P_3 = \emptyset$ .
3. Si  $P_1 \cap D \neq \emptyset$  et  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ , alors  $P_2 \cap D \neq \emptyset$ .

**Orthogonalité**

**7**  $ABCDEFGH$  est un cube. En utilisant la définition, démontrer l'orthogonalité des droites :

- a.  $(AB)$  et  $(DH)$     b.  $(AC)$  et  $(FH)$     c.  $(DC)$  et  $(FG)$

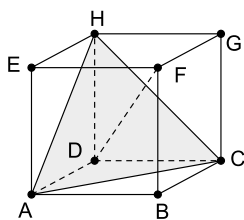
**8** Soit  $ABCDEFGH$  un cube et  $I, J, K$  les milieux respectifs des segments  $[AC], [AH]$  et  $[HC]$ . Montrer que les droites  $(IJ)$  et  $(DK)$  sont orthogonales.



**9**  $ABCDEFGH$  est un cube et  $M$  un point de la droite  $(AD)$ . Montrer que le triangle  $GCM$  est rectangle.

**10**  $ABCDEFGH$  est un cube.

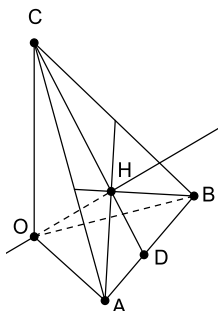
- Démontrer l'orthogonalité de la droite  $(CH)$  et du plan  $(ADG)$ .
- En déduire que les droites  $(CH)$  et  $(DF)$  sont orthogonales.
- Démontrer que la droite  $(DF)$  est orthogonale au plan  $(ACH)$ .



**11**  $OABC$  est un tétraèdre trirectangle en  $O$ , c'est-à-dire que les triangles  $OAB$ ,  $OAC$ ,  $OBC$  sont rectangles en  $O$ .

Soit  $H$  l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

- Démontrer que les droites  $(AB)$  et  $(OH)$  sont orthogonales.
- Démontrer que la droite  $(OH)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .

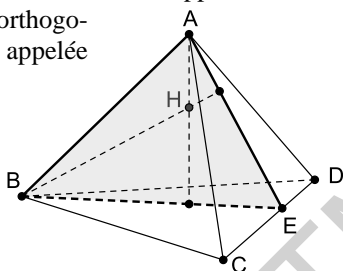


### 12 Tétraèdres orthocentriques

Un tétraèdre  $ABCD$  possède six arêtes  $(AB)$  et  $(CD)$ ,  $(BC)$  et  $(AD)$ ,  $(CA)$  et  $(BD)$  qui déterminent trois paires d'arêtes dites « opposées ».

La droite passant par  $A$  et orthogonale au plan  $(BCD)$  est appelée hauteur issue de  $A$ , on la note  $(h_A)$ . On définit de même  $(h_B)$ ,  $(h_C)$ ,  $(h_D)$ .

Le tétraèdre  $ABCD$  est dit orthocentrique si les quatre hauteurs sont concourantes.

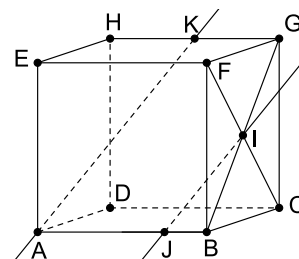


- On suppose que  $(h_A)$  et  $(h_B)$  ont un point commun  $H$ .
  - Montrer que  $(h_A)$  et  $(h_B)$  définissent un plan  $(P)$  et que  $(CD)$  est perpendiculaire à  $(P)$ .
  - En déduire que  $(AB)$  et  $(CD)$  sont orthogonales.
  - Soit  $E = (P) \cap (CD)$ . À l'aide de triangles rectangles, montrer que  $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 = EC^2 - ED^2$ .
- Montrer que dans un tétraèdre orthocentrique, le pied de la hauteur sur une face est l'orthocentre de cette face et que  $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ .
- Réciproquement, on suppose que  $(AB)$  et  $(CD)$  sont orthogonales. Soit  $E$  le pied de la hauteur issue de  $B$  dans le triangle  $BCD$ .
  - Montrer que les hauteurs issues de  $A$  et  $B$  dans le triangle  $ABE$  sont des hauteurs du tétraèdre.
  - En déduire que  $(h_A)$  et  $(h_B)$  sont sécantes en un point  $H$ .
  - Montrer que  $(AB)$  est perpendiculaire à  $(CDH)$ .
  - En déduire que  $(CH)$  et  $(AB)$  sont orthogonales, ainsi que les droites  $(DH)$  et  $(AB)$ .
- On suppose de plus que  $(AC)$  et  $(BD)$  sont orthogonales.
  - Montrer que  $(CH)$  est la hauteur issue de  $C$  du tétraèdre.
  - Déduire de 1. que  $(AD)$  et  $(BC)$  sont orthogonales.
  - En déduire que  $(DH)$  est la quatrième hauteur du tétraèdre.
  - Énoncer une condition suffisante pour qu'un tétraèdre soit orthocentrique.

### Vecteurs de l'espace

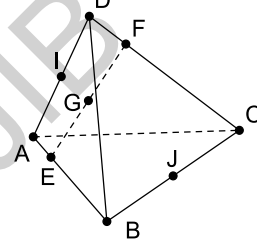
**13**  $ABCDEFGH$  est le cube représenté ci-contre.  $I$  est le centre de la face  $BCGF$ ,  $K$  est le milieu de  $[HG]$  et  $J$  le point tel que  $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BA}$ .

- À l'aide de la relation de Chasles, démontrer que  $\vec{AK} = 2\vec{JI}$ .
- Que peut-on en déduire pour les deux droites  $(AK)$  et  $(IJ)$  ?



**14**  $ABCD$  est un tétraèdre et  $\lambda$  un réel. Soit  $I$  et  $J$  les milieux respectifs de  $[AD]$  et  $[BC]$ . On définit  $E$  et  $F$  par  $\vec{AE} = \lambda\vec{AB}$  et  $\vec{DF} = \lambda\vec{DC}$ . Soit  $G$  le milieu de  $[EF]$ .

- Exprimer le vecteur  $\vec{GE}$  en fonction des vecteurs  $\vec{GA}$  et  $\vec{GB}$ .
  - Exprimer de même le vecteur  $\vec{GF}$  en fonction des vecteurs  $\vec{GD}$  et  $\vec{GC}$ .
- Démontrer que  $(1 - \lambda)\vec{GI} + \lambda\vec{GJ} = \vec{0}$ .
  - En déduire que  $I, J$  et  $G$  sont alignés.



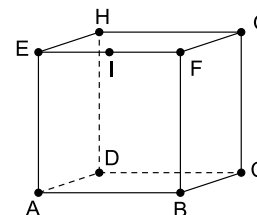
**15**  $ABCD$  est un tétraèdre,  $G$  est le centre de gravité de la face  $ACD$  et  $M$  est le point tel que  $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BA}$ .

- Démontrer que la droite  $(MG)$  est la parallèle à la droite  $(BI)$  où  $I$  est le milieu de  $[CD]$ .
- En déduire que la droite  $(MG)$  est parallèle au plan  $(BCD)$ .

### Vecteurs coplanaires et base de l'espace

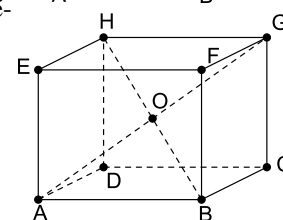
**16**  $ABCDEFGH$  est le cube ci-contre,  $I$  est le milieu de l'arête  $[EF]$ . Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont coplanaires ou non et justifier.

- $\vec{AB}, \vec{AE}$  et  $\vec{DG}$  ;
- $\vec{BC}, \vec{DH}$  et  $\vec{EI}$  ;
- $\vec{GC}, \vec{FE}$  et  $\vec{IA}$  ;
- $\vec{BC}, \vec{DH}$  et  $\vec{CI}$  ;



**17**  $ABCDEFGH$  est un parallélépipède rectangle de centre  $O$ .

- Démontrer que les vecteurs  $\vec{OA}, \vec{GE}$  et  $\vec{DH}$  sont coplanaires.
- Les vecteurs  $\vec{OA}, \vec{GE}$  et  $\vec{DA}$  sont-ils coplanaires ?



**18** Soit  $\vec{u}(-2; 3; 1)$ ,  $\vec{v}(1; 0; 3)$  et  $\vec{w}(1; 2; -1)$ .

- Montrer que  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  ne sont pas coplanaires.
- Exprimer  $\vec{t}(1; 7; 2)$  en fonction de  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ .

**19** On considère les vecteurs  $\vec{u}(0; -1; 1)$ ,  $\vec{v}(-2; -1; 3)$ ,  $\vec{w}(-1; -1; -1)$  et  $\vec{t}(-2; 1; 1)$ .

Les triplets  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  et  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$  sont-ils des bases de l'espace ?

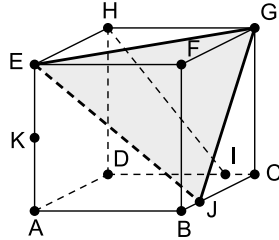
### Repérage dans l'espace

**20** Montrer que les points de coordonnées  $A(-2; -1; 6)$ ,  $B(1; 3; 5)$  et  $C(13; 19; 1)$  sont alignés.

**21** On considère les points  $A(-1; -4; 5)$ ,  $B(2; 0; 3)$ ,  $C(-8; -11; -8)$  et  $D(-4; -15; 12)$ .

1. Donner les coordonnées du point  $M$  tel que  $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ .
2. Les points  $A, B, M$  sont-ils alignés ?

**22**  $ABCDEFGH$  est le cube ci-contre. On considère les points  $I$  et  $J$  définis par  $\overrightarrow{DI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ . On munit l'espace du repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .



1. Déterminer les coordonnées des points  $E, G, H, I$  et  $J$ .
2. a. Démontrer qu'il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\overrightarrow{HI} = x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{EJ}$ .  
b. En déduire que  $(HI)$  est parallèle à  $(EGJ)$ .

**23** Montrer que les points  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(3; 2; 6)$ ,  $C(1; 4; 2)$  et  $D(-1; 4; -1)$  sont coplanaires.

**24** Montrer que les points  $A(-4; 5; -1)$ ,  $B(-1; 5; -4)$ ,  $C(-2; 12; 4)$  et  $D(4; 12; -2)$  sont coplanaires.

**25** Soit  $A(1; 2; 4)$ ,  $B(3; 1; 3)$  et  $C(2; 6; 5)$ .

1. Démontrer que  $A, B, C$  ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le point  $D(a; b; c)$  appartient au plan  $(ABC)$  si et seulement si  $a - b + 3c = 11$ .

**26** Soit les points  $A(3; 2; 1)$ ,  $B(10; 6; -1)$ ,  $C(9; 8; -9)$  et  $D(2; 4; -7)$ .

1. Démontrer que ces points sont coplanaires.
2. Montrer que  $ABCD$  est un losange.

**27**  $ABCDEFGH$  est un cube,  $I$  est le centre de gravité du triangle  $BEG$ . En se plaçant dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  montrer que les points  $D, I, F$  sont alignés.

### Représentations paramétriques

**28** Soit  $(d)$  la droite passant par  $A(2; 7; -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(1; 2; -2)$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique de  $(d)$ .
2. Déterminer le point d'ordonnée 3 de la droite  $(d)$ .

**29** Donner une représentation paramétrique de  $(AB)$  dans chacun des cas suivants.

- a.  $A(2; -1; 3)$  et  $B(0; 2; 4)$ .
- b.  $A(1; 2; 3)$  et  $B(-1; -2; 2)$ .

**30** Soit  $(d)$  la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -2 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

1. Le point  $A(-2; -4; 13)$  appartient-il à  $(d)$  ?
2. Soit les points  $B(1; 4; 2)$  et  $C(-11; 0; 22)$ . La droite  $(BC)$  est-elle parallèle à  $(d)$  ?
3. Donner une représentation paramétrique de  $(BC)$ .

**31** Soit  $(d)$  et  $(d')$  les droites de représentations paramétriques  $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 4t, t \in \mathbb{R} \text{ et} \\ z = 1 - 6t \end{cases}$  et  $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k, k \in \mathbb{R}. \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ . Démontrer que ces droites sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

**32** Soit  $(d)$  et  $(d')$  les droites de représentations paramétriques  $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \text{ et} \\ z = 2 - t \end{cases}$  et  $\begin{cases} x = 2k \\ y = 3 + k, k \in \mathbb{R}. \\ z = -2 + 3k \end{cases}$ . Démontrer que ces droites ne sont pas coplanaires.

**33** Soit les points  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 3; 4)$  et  $C(4; 5; 6)$ .  
1. Justifier que les points  $A, B, C$  ne sont pas alignés.  
2. Donner une représentation paramétrique du plan  $(ABC)$ .  
3. Le point  $D(7; 9; 11)$  appartient-il au plan  $(ABC)$  ?

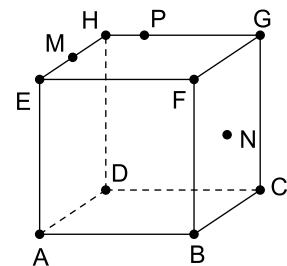
**34** Soit  $A(-1; 3; 2)$  et  $B(2; 1; -2)$ . Déterminer l'intersection de  $(AB)$  avec le plan passant par  $O$  et dirigé par  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

**35** La droite  $(d)$  passe par le point  $A(0; 2; 3)$  et est dirigée par le vecteur  $\vec{u}(1; 1; 1)$ . La droite  $(d')$  passe par les points  $B(2; 0; -1)$  et  $C(4; -2; 2)$ . Étudier la position relative de ces droites.

**36** Soit les points  $A(4; -4; 3)$ ,  $B(2; -1; 4)$ ,  $C(-3; 5; 5)$ ,  $D(-2; 2; 5)$ ,  $E(-4; 5; 6)$  et  $F(3; 2; 4)$ . Déterminer une équation paramétrique à coefficient entiers de l'intersection des plans  $(ABC)$  et  $(DEF)$ .

**37** (2014, Amérique du Nord)<sup>1</sup>. On considère un cube  $ABCDEFGH$  donné ci-dessous.

On note  $M$  le milieu du segment  $[EH]$ ,  $N$  celui de  $[FC]$  et  $P$  le point tel que  $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$ .



#### Partie A – Section du cube par le plan $(MNP)$

1. Justifier que les droites  $(MP)$  et  $(FG)$  sont sécantes en un point  $L$ . Construire le point  $L$ .
2. On admet que les droites  $(LN)$  et  $(CG)$  sont sécantes et on note  $T$  leur point d'intersection. On admet que les droites  $(LN)$  et  $(BF)$  sont sécantes et on note  $Q$  leur point d'intersection.
  - a. Construire les points  $T$  et  $Q$  en laissant apparents les traits de construction.
  - b. Construire l'intersection des plans  $(MNP)$  et  $(ABF)$ .
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan  $(MNP)$ .

#### Partie B

L'espace est rapporté au repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Donner les coordonnées des points  $M, N$  et  $P$  dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point  $L$ .
3. On admet que le point  $T$  a pour coordonnées  $(1; 1; \frac{5}{8})$ . Le triangle  $TPN$  est-il rectangle en  $T$  ?